MAINTENANCE 1998 MIE3MAT

Exercice I

A-Résolution de l'équation différentielle $(E)\quad y''+4y'+5y=0$

1^o
Cette équation différentielle (E) a pour équation caractéristique $r^2+4r+5=0$
$\Delta=16-20=-4=(2i)^2$
les solutions sont $r_1=-2+i$ et $r_2=-2-i$
L'équation différentielle (E) a pour solution : $y=e^{-2x}(Acos(x)+Bsin(x))$
2^o
f est solution particulière de (E) vérifiant $f(0)=1$ et $f'(0)=-2$
$f(0)=1$ donc $A=1$ et $f(x)=e^{-2x}(cos(x)+Bsin(x))$
calculons $f'(x)$
$f'(x)=-2e^{-2x}(cos(x)+Bsin(x))+e^{-2x}(-sin(x)+Bcos(x))$
puisque $f'(0)=-2$ alors $-2+B=-2$ donc $B=0$

$$f(x)=e^{-2x}cos(x)$$

B-Developpement limité et calcul intégral.

1^o Développement limité de $f(x)=e^{-2x}cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$
$e^{-2x}=1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)$
$e^{-2x}=1-2x+\frac{4x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)$
$cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)$
donc $f(x)=\left(1-2x+2x^2+x^2\varepsilon_1(x)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)\right)=1-2x+2x^2-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)=1-2x+\frac{3}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$
2^o
Calculons $I(\alpha)$
$I(\alpha)=\int_0^\alpha P(x)dx=[x-x^2+\frac{1}{2}x^3]_0^\alpha=\alpha-\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha^3$
3^o *a)*
Puisque f vérifie (E) alors $f''+4f'+5f=0$ donc $f=\frac{1}{5}(-f"-4f')$
et quelque soit x de $\mathbb{R}$ alors $f(x)=\frac{1}{5}(-f''(x)-4f'(x))$
b)
Calculons H'
$H'(x)=\frac{1}{5}(-f''(x)-4f'(x))$ on remarque que $H'(x)$ est égal à $f(x)$ donc $H(x)$ est une primitive de $f(x)$.
c)
Calculons $f'(x)=-2e^{-2x}cos(x)-e^{-2x}sin(x)$
$J(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx=[\frac{1}{5}\left(-f'(x)-4f(x)\right)]_0^\alpha=[\frac{1}{5}\left(2e^{-2x}cos(x)+e^{-2x}sin(x)-4e^{-2x}cos(x)\right)]_0^\alpha$
$=[\frac{1}{5}e^{-2x}\left(-2cos(x)+sin(x)\right)]_0^\alpha=\frac{1}{5}e^{-2\alpha}(-2cos(\alpha)+sin(\alpha))+\frac{2}{5}$
4^o
Pour $\alpha=0,4$ l'erreur relative est $\frac{J(\alpha)-I(\alpha)}{J(\alpha)}=\frac{0,269-0,272}{0,269}=-0,009$
donc l'erreur relative en valeur absolue inférieur à 1%.

Exercice II

A
1^o
X suit une loi $\mathcal{N}\ (15\ ;\ 1,5)$
$P\left(13\leq X\leq 16\right)=P\left(-\frac{2}{1,5}\leq\frac{X-15}{1,5}\leq\frac{1}{1,5}\right)=\pi(\frac{2}{3})-\pi(-\frac{4}{3})=\pi(\frac{2}{3})+\pi(\frac{4}{3})-1=0,6536$
2^o
$P\left(X\leq h\right)=0,95$ donc $P\left(\frac{X-15}{1,5}\leq\frac{h-15}{1,5}\right)=0,95$ et $\frac{h-15}{1,5}=1,65$ et $h=15+1,5.1,65=17,48$

B-

1^o

On a une répétition d'une même épreuve elles sont indépendantes et avec deux possibilités Le distributeur est hors service par manque de concentré avec la probabilité $p = 0,05$ ou fonctionne avec la probabilité $q = 1 - p = 0,95$

Y suit une loi Binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0,05$ $\mathcal{B}$ $(30\ ;\ 0,05)$.

2^o

On approche cette loi par une loi, de poisson de paramètre $\lambda = np$ donc $\lambda = 1,5$.

$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = e^{-1,5}\left(1 + 1,5 + \frac{1,5^2}{2}\right) = 0,81.$

C-

1^o

Puisque $P(Z = 1) = 6.P(Z = 3)$ donc $e^{-\lambda}.\lambda = 6.e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}$ et $\lambda^2 = 1$

λ est positif donc $\lambda = 1$.

2^o *a)*

$P\left[(Y = 1)\ et\ (Z = 1)\right] = P(Y = 1) \times P(Z = 1)$ les variables aléatoires sont indépendantes

$P(Y = 1) = 1,5.e^{-1,5} = 0,335$

$P(Z = 1) = 1.e^{-1} = 0,368$

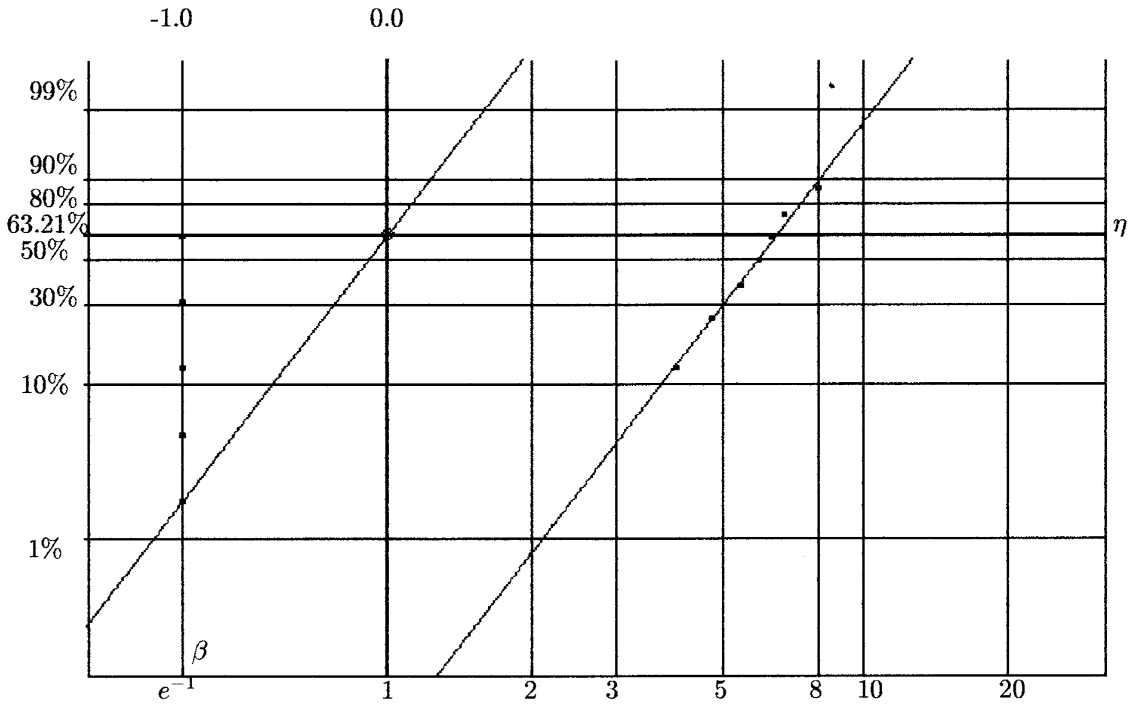
$P\left[(Y = 1)\ et\ (Z = 1)\right] = 0,335 \times 0,368 = 0,123$

b)

Calculons la probabilité p pour que le distributeur tombe en panne 2 fois.

$p = P((Y = 2\ et\ Z = 0)\ ou\ (Y = 1\ et\ Z = 1)\ ou\ (Y = 0\ et\ \ Z = 2)) = P(Y = 2).P(Y = 0) + P(Y = 1).P(Z = 1) + P(Y = 0).P(Z = 2) = 0,30.$

1^o



La représentation sur le papier de Weibull du nuage de point expérimentaux est linéaire. Cette distribution peut être ajustée par une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$, $\eta = 65$ et $\beta = 4$

Puisque $\beta = 4$ alors A=0,9064 et la MTBF=65 . 0,9064 + 0 = 58,91.

2^o

La périodicité d'un entretien systématique reposant sur une fiabilité à 90% d'après le graphique est de 37 jours et d'après le calcul

$$
\begin{aligned}
R(t) &= 0{,}90 \\
e^{-(\frac{t}{65})^4} &= 0{,}90 \\
-(\tfrac{t}{65})^4 &= ln(0,90) \\
(\tfrac{t}{65})^4 &= -ln(0,90) \\
e^{ln(\frac{t}{65})^4} &= -ln(0,90) \\
e^{4ln(\frac{t}{65})} &= -ln0,90 \\
4ln\tfrac{t}{65} &= ln\left(-ln(0,90)\right) \\
\tfrac{t}{65} &= e^{\frac{1}{4}ln(-ln(0,90))} \\
\tfrac{t}{65} &= e^{\frac{1}{4}ln(-ln(0,90))} \\
t &= 65e^{\frac{1}{4}ln(-ln(0,90))} \\
t &= 37{,}03
\end{aligned}
$$