

MAINTENANCE PRODUCTIQUE MATGRB 1999

Exercice I

1°

L suit une loi normale $\mathcal{N}(300; 3)$ calculons P_1

$$P_1 = P(293,5 \leq L \leq 306,5) = P\left(-\frac{6,5}{3} \leq \frac{L-300}{3} \leq \frac{6,5}{3}\right) = 2 \cdot \pi\left(\frac{6,5}{3}\right) - 1 = 2,0,9846 - 1 = 0,9692.$$

2°

$$P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,0021 \quad A \text{ et } B \text{ sont des événements indépendants.}$$

$$P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,03 + 0,07 - 0,0021 = 0,0979$$

$$P(E_3) = 1 - P(E_2) = 0,9021.$$

3°

Le stock est important pour qu'on puisse assimiler à un tirage avec remise et l'événement est réalisé ou il ne l'est pas donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,902$

$$P(X \geq 9) = C_{10}^9 \cdot 0,902^9 \cdot 0,098 + C_{10}^{10} \cdot 0,902^{10} = 0,387 + 0,357 = 0,744$$

4° a)

D'une manière générale, on choisit la moyenne \bar{x} de l'échantillon comme estimation ponctuelle de la moyenne inconnue m de cette population.

donc $\mu = 4,012$.

b)

Déterminons un intervalle de confiance de la moyenne μ centré en \bar{x} avec le coefficient de confiance de 95%

La loi d'échantillonnage de la moyenne \bar{X} suit une loi normale $\mathcal{N}(\bar{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$$P(\bar{x} - h \leq \bar{X} \leq \bar{x} + h) = 0,95 \text{ donc } P\left(-\frac{h\sqrt{60}}{0,084} \leq \frac{\bar{X}-\bar{x}}{\frac{0,084}{\sqrt{60}}} \leq \frac{h\sqrt{60}}{0,084}\right) = 0,95 \text{ et } \pi\left(\frac{h\sqrt{60}}{0,084}\right) - 1 = 0,95$$

$$h = 1,96 \cdot \frac{0,084}{\sqrt{60}} = 0,021$$

L'intervalle de confiance est donc $[3,991; 4,033]$

c)

l'affirmation «la moyenne μ est obligatoirement entre 3,991 et 4,033» est fautive. Il y a un risque d'erreur de 5% que la moyenne n'appartienne pas à l'intervalle de confiance.

Exercice II

A. Résolution d'une équation différentielle

1°

Résolvons dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$

Elle a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui peut s'écrire $(r - 1)^2 = 0$

La solution générale de l'équation différentielle est : $y = (Ax + B)e^x$.

2°

Déterminons les constantes a, b etc pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution particulière de (E).

$$g'(x) = 2ax + b \text{ et } g''(x) = 2a$$

$$ax^2 + bx + c - 4ax - 2b + 2a = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

$$ax^2 + (b - 4a)x + 2a - 2b + c = \frac{x^2}{2} - x - 1$$

par identification

$$\begin{cases} a & = & \frac{1}{2} \\ -4a + b & = & -1 \\ 2a - 2b + c & = & -1 \end{cases}$$

donc $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = 0$.

La solution particulière de (E) : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$

3°

L'ensemble des solutions de (E) : $(Ax + B)e^x + \frac{x^2}{2} + x$.

4°

Déterminons la solution particulière f de l'équation (E).

$f(0) = 0$ donc $B = 0$ alors $B = 0$.

$f(1) = e + \frac{3}{2}$ alors $Ae + \frac{1}{2} + 1 = e + \frac{3}{2}$ donc $A = 1$.

$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x$.

B. Etude d'une fonction

1°

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

On peut en déduire que la courbe \mathcal{C} est asymptote à la courbe \mathcal{P} .

2°

$f(x) - g(x) = xe^x$ $f(x) - g(x)$ est du signe de x .

Donc la courbe \mathcal{C} est au dessous de \mathcal{P} pour x négatif et au dessus pour x positif.

3° a)

$f'(x) = e^x + xe^x + x + 1 = (x+1)e^x + x + 1 = (x+1)(e^x + 1)$

b)

$f'(x)$ est du signe de $x+1$ car $e^x + 1$ est positif

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

\searrow $-\frac{2+e}{2e}$ \nearrow

4° a)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$	1,35	0,42	-0,27	-0,71	-0,87	-0,68	0	1,45	4,22

5° a)

$I = \int_{-3}^{-2} (g(x) - f(x)) dx = - \int_{-3}^{-2} xe^x dx$ en faisant une intégration par parties

$$\begin{aligned} u &= x & du &= dx \\ dv &= e^x dx & v &= e^x \end{aligned}$$

$$I = -[xe^x]_{-3}^{-2} + \int_{-3}^{-2} e^x dx = [(1-x)e^x]_{-3}^{-2} = 3e^{-2} - 4e^{-3}$$

Puisque l'unité d'aire est de 4cm^2 alors $A = 4(-4e^{-3} + 3e^{-2})$

b)

Une valeur approchée de $A = 0,83\text{cm}^2$.