

MAINTENANCE PRODUCTIQUE MATGRB 1999

Exercice I

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Une entreprise de matériel pour l'industrie produit des modules constitués de deux types de pièces : P_1 et P_2

1° Une pièce P_1 est considérée comme bonne si sa longueur, en centimètres, est comprise entre 293,5 et 306,5.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce P_1 choisie au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.

On suppose que L suit la loi normale de moyenne 300 et d'écart type 3. Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'une pièce P_1 soit bonne.

2° On note A l'événement : «une pièce P_1 choisie au hasard dans la production des pièces P_1 est défectueuse».

On note de même B l'événement, : «une pièce P_2 choisie au hasard dans la production des pièces P_2 est défectueuse».

On admet que les probabilités des événements A et B sont $P(A) = 0,03$ et $P(B) = 0,07$ et on suppose que ces deux événements sont indépendants.

Un module étant choisi au hasard dans la production, calculer, à 10^{-4} près, la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : «les deux pièces du module sont défectueuses»

E_2 : «au moins une des deux pièces du module est défectueuse»

E_3 : «aucune des deux pièces constituant le module n'est défectueuse».

3° Dans un important stock de ces modules, on prélève au hasard 10 modules pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 modules.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 modules, associe le nombre de modules réalisant l'événement E_3 défini au 2°.

On suppose que la probabilité de l'événement E_3 est 0,902.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

b) Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 modules au moins réalisent l'événement E_3 .

4° Dans cette question on s'intéresse au diamètre des pièces P_2 .

Soit \bar{X} la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 60 pièces P_2 prélevées au hasard et avec remise dans la production de la journée considérée, associe la moyenne des diamètres des pièces de cet échantillon. On suppose que \bar{X} suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\frac{\sigma}{60}$ avec $\sigma = 0,084$.

On mesure le diamètre, exprimé en centimètres, de chacune des 60 pièces P_2 d'un échantillon choisi au hasard et avec remise dans la production d'une journée.

On constate que la valeur approchée arrondie à 10^{-3} près de la moyenne \bar{x} de cet échantillon est $\bar{x} = 4,012$.

a) À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle, à 10^{-3} près, de la moyenne μ du diamètre des pièces P_2 produites pendant cette journée.

b) Déterminer un intervalle de confiance centré en \bar{x} de la moyenne μ des diamètres des pièces P_2 produites pendant la journée considérée, avec le coefficient de confiance 95%.

c) On considère l'affirmation suivante : «la moyenne μ est obligatoirement entre 3,991 et 4,033».

Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

Exercice II

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

2 On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1$

où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1° Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E') : $y'' - 2y' + y = 0$.

2° Déterminer les constantes réelles a , b , c pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de l'équation (E).

3° Dédire du 1° et du 2° l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4° Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f(1) = e + \frac{3}{2}$.

B. Etude d'une fonction

Soient f et g les deux fonctions de la variable réelle x définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = xe^x + \frac{x^2}{2} + x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f et \mathcal{P} la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1° Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$.

Interpréter graphiquement le dernier résultat.

2° Etudier sur \mathbb{R} la position relative des deux courbes \mathcal{C} et \mathcal{P} .

3° a) Démontrer que pour tout x de \mathbb{R} : $f'(x) = (x+1)(e^x + 1)$.

b) Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .

4° a) Compléter le tableau de valeurs figurant sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2} près.

b) Construire la courbe \mathcal{C} dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ sur la feuille annexe (à rendre avec la copie) où figure la courbe \mathcal{P} .

5° a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que la valeur exacte en cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , la parabole \mathcal{P} et les droites d'équations $x = -3$ et $x = -2$ est $A = 4(-4e^{-3} + 3e^{-2})$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de A .

ANNEXE

Partie B

4° a)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$									

