BTS 2000
Correction

EXERCICE 1 :

1° :

La probabilité qu'un boulon choisi au hasard dans le lot soit conforme pour le diamètre de la tête est $P(25{,}30 \le D \le 25{,}70)$.

La variable aléatoire D suit la loi normale $N(25{,}50;0{,}1)$. On se ramène à la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$ par le changement de variable suivant : $T = \dfrac{D-m}{\sigma} = \dfrac{D-25{,}50}{0{,}1}$.

$$P(25{,}30 \le D \le 25{,}70) = P\left(\frac{25{,}30-25{,}50}{0{,}1} \le T \le \frac{25{,}70-25{,}50}{0{,}1}\right) = P(-2 \le T \le 2)$$

$$= 2\times\Pi(2)-1 \overset{\text{table}}{=} 2\times 0{,}9772-1 = 0{,}9544 \approx 0{,}95.$$

Il y a 95% de chance qu'un boulon choisi au hasard dans le lot soit conforme.

2° :

a) X suit une loi Binomiale car :
- deux issues possibles : conforme ou non ;
- 10 épreuves aléatoires indépendantes : 10 boulons ;
- même probabilité de succès (p=0,96) à chaque épreuve.

Les paramètres de cette loi sont : n=10 et p=0,96.

b) La probabilité cherchée est $P(X \ge 9) = P(X=9)+P(X=10)$. En effet, au plus un boulon non conforme signifie qu'il y a au moins 9 boulons conformes !

$$P(X \ge 9) = P(X=9)+P(X=10) = C_{10}^{9}\times 0{,}96^{9}\times 0{,}04^{1} + C_{10}^{10}\times 0{,}96^{10}\times 0{,}04^{0} = 0{,}66+0{,}28$$

$$= 0{,}94.$$

Il y a 94% de chance qu'au plus un boulon choisi au hasard dans le lot soit non conforme.

3° :

a) Sous l'hypothèse nulle H_0, la variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale de moyenne $\mu = 10$ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}1}{\sqrt{100}} = 0{,}01$.

b) La variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale $N(10;0{,}01)$. On se ramène à la loi normale centrée réduite N(0 ;1) par le changement de variable suivant :

$$U=\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma'}=\frac{\overline{Y}-10}{0{,}01}.$$

$$P\left(10-h\le\overline{Y}\le10+h\right)=P\left(\frac{10-h-10}{0{,}01}\le U\le\frac{10+h-10}{0{,}01}\right)=P\left(\frac{-h}{0{,}01}\le U\le\frac{h}{0{,}01}\right)=2\times\Pi\left(\frac{h}{0{,}01}\right)-1.$$

La lecture inverse de la table donne :

$$2\times\Pi\left(\frac{h}{0{,}01}\right)-1=0{,}95\Leftrightarrow\Pi\left(\frac{h}{0{,}01}\right)=\frac{0{,}95+1}{2}=0{,}975\overset{\text{inverse table}}{\Rightarrow}\frac{h}{0{,}01}=1{,}96\Rightarrow h=1{,}96\times0{,}01=0{,}0196.$$ Donc $h\approx0{,}02$.

c) La région d'acceptation est $[10-0{,}02;10+0{,}02]=[9{,}98;10{,}02]$.

La région de décision est donc :

- On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 boulons et on calcule la moyenne $\overline{y}$ des diamètres des pieds des boulons de cet échantillon.
- Si $\overline{y}$ appartient à l'intervalle $[9{,}98;10{,}02]$, on accepte H_0 au seuil de risque 5%.
- Sinon on rejette H_0 et on accepte H_1 à ce même seuil.

d) pour l'échantillon observé $\overline{y}=10{,}03$ n'est pas compris entre 9,98 et 10,02. On rejette donc H_0 au seuil de risque 5% et on accepte H_1: **on conclut que les boulons du stock ne sont pas conformes pour le diamètre de leur pied.**

EXERCICE 2 :

A. Résolution d'une équation différentielle :

1° :

$(E_0): y''-4y=0$

$(EC): r^2-4=0\Leftrightarrow r=\pm\sqrt{4}=\pm2$

ou : $\Delta=(0)^2-4\times1\times(-4)=16$

$\Delta>0\Rightarrow\quad r_1=\dfrac{0+\sqrt{16}}{2}=2;\qquad r_2=\dfrac{0-\sqrt{16}}{2}=-2.$

D'après le formulaire, les solutions générales de (E_0) sont de la forme : $y_1(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ avec C_1, C_2 nombres réels.

2° :

g est une solution particulière de (E) si et seulement si : $g''-4g=-\dfrac{16}{3}e^{-2x}$.

Il nous faut donc calculer g' pour avoir g'' :

$$g(x) = \frac{4}{3} x e^{-2x}$$

$$U = \frac{4}{3} x \qquad U' = \frac{4}{3}$$

$$V = e^{-2x} \qquad V' = -2e^{-2x}$$

$$g'(x) = U'V + UV' = \frac{4}{3} e^{-2x} + \left(\frac{4}{3} x\right)\left(-2e^{-2x}\right) = e^{-2x}\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} x\right).$$

$$g'(x) = e^{-2x}\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} x\right)$$

$$U = e^{-2x} \qquad U' = -2e^{-2x}$$

$$V = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} x \qquad V' = -\frac{8}{3}$$

$$g''(x) = U'V + UV' = \left(-2e^{-2x}\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} x\right) + e^{-2x}\left(-\frac{8}{3}\right) = e^{-2x}\left(-2\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} x\right) - \frac{8}{3}\right)$$

$$= e^{-2x}\left(\frac{-8}{3} + \frac{16}{3} x - \frac{8}{3}\right) = e^{-2x}\left(\frac{16}{3} x - \frac{16}{3}\right).$$

On remplace tout cela dans le premier membre de (E) :

$$g'' - 4g = e^{-2x}\left(\frac{16}{3} x - \frac{16}{3}\right) - 4\left(\frac{4}{3} x e^{-2x}\right) = e^{-2x}\left(\frac{16}{3} x - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} x\right) = e^{-2x}\left(-\frac{16}{3}\right).$$ Donc g est bien une solution particulière de (E).

<u>3° :</u>

Il suffit d'additionner les deux fonctions trouvées précédemment :

$y(x) = y_1(x) + g(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{4}{3} x e^{-2x}$. Avec C_1, C_2 nombres réels.

<u>4° :</u>

$\begin{cases} h(0) = \frac{4}{3} \\ h'(0) = -\frac{4}{3} \end{cases}$ conditions initiales qui vont permettre de trouver la valeur des deux constantes C_1 et C_2.

$$y(0) = C_1 e^{2\times 0} + C_2 e^{-2\times 0} + \frac{4}{3} \times 0 \times e^{-2\times 0} = C_1 + C_2$$

$$C_1 + C_2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3C_1 + 3C_2 = 4 \ \ (1)$$

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} + \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} x\right) e^{-2x}$$

$$y'(0) = 2C_1 e^{2\times 0} - 2C_2 e^{-2\times 0} + \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} \times 0\right) e^{-2\times 0} = 2C_1 - 2C_2 + \frac{4}{3}$$

$2C_1 - 2C_2 + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$

$2C_1 - 2C_2 = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}$

$2C_1 - 2C_2 = -\frac{8}{3}$

$6C_1 - 6C_2 = -8 \Leftrightarrow 3C_1 - 3C_2 = -4 \quad (2)$

Les équations (1) et (2) forment un système d'équations à deux inconnues :

$\begin{cases} 3C_1 + 3C_2 = 4 \\ 3C_1 - 3C_2 = -4 \end{cases}$ on additionne les deux équations et on obtient :

$6C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$

$3C_2 = 4 - 3C_1 = 4 - 0 = 4 \Leftrightarrow C_2 = \frac{4}{3}$ d'où

$h(x) = \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}xe^{-2x} = e^{-2x}\left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\right) = e^{-2x}\frac{4}{3}(x+1).$

B. Etude d'une fonction :

1° :

a) On va calculer la dérivée f' de f en utilisant la formule : $(UV)' = U'V + UV'$.

$U = \frac{4}{3}(x+1) \qquad U' = \frac{4}{3}$

$V = e^{-2x} \qquad V' = -2e^{-2x}$

$f'(x) = U'V + UV' = \frac{4}{3}e^{-2x} + \left(\frac{4}{3}(x+1)\right)\left(-2e^{-2x}\right) = e^{-2x}\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}\right)$

$= e^{-2x}\left(-\frac{8}{3}x - \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x}$

b) $-\frac{4}{3} < 0$, $e^{-2x} > 0$ pour tout x réel, de plus l'intervalle d'étude de la fonction f est $[0;+\infty[$ (x ne peut être que positif ou nul !) donc $2x+1>0$.

Ces trois parties sont multipliées entre elles ; par la règle des signes, le total, c'est-à-dire la dérivée de f, est strictement négative.

f est donc une fonction strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

2° :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{3}x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0^+$ c'est une forme indéterminée mais la fonction exponentielle est prioritaire devant la fonction polynôme donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.

La limite obtenue traduit géométriquement la présence d'une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation y=0.

3° :

a) DL d'ordre 3 par le formulaire : $e^t \overset{0}{=} 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to0}\varepsilon(t) = 0$.

On change de variable : t en -2x et on obtient :

$$e^{-2x} \overset{0}{=} 1+\frac{-2x}{1!}+\frac{(-2x)^2}{2!}+\frac{(-2x)^3}{3!}+(-2x)^3\varepsilon(-2x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$e^{-2x} \overset{0}{=} 1-2x+\frac{4x^2}{2}+\frac{-8x^3}{6}-8x^3\varepsilon(-2x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$e^{-2x} \overset{0}{=} 1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3+x^3\varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon'(x)=0$$

b) On reconstruit à partir du DL précédent la fonction f en multipliant la partie régulière par $\frac{4}{3}(x+1)$:

$$e^{-2x}\left(\frac{4}{3}(x+1)\right) \overset{0}{=} \left(1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\left(\frac{4}{3}(x+1)\right)+x^3\varepsilon'(x)$$

$$f(x) \overset{0}{=} \frac{4}{3}x-\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{4}{3}-\frac{8}{3}x+\frac{8}{3}x^2-\frac{16}{9}x^3+x^3\varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon'(x)=0$$

$$f(x) \overset{0}{=} \frac{4}{3}-\frac{4}{3}x+\frac{8}{9}x^3+x^3\varepsilon'(x)$$

c) Equation de la tangente T : $y=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}x$.

L'étude du signe de $\frac{8}{9}x^3$ sur $[0;+\infty[$ va nous indiquer les positions de C et T au voisinage de 0.

Quand $x = 0$ C intercepte T

Quand $x > 0$ C est au dessus de T.

<u>4° :</u>

a) $I=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x}dx$

Méthode d'intégration par parties :

$U=\frac{4}{3}(1+x) \qquad U'=\frac{4}{3}$

$V'=e^{-2x} \qquad V=\frac{e^{-2x}}{-2}=-\frac{e^{-2x}}{2}$

La formule donne :

$$I=[UV]_0^3-\int_0^3 U'V$$

$$I=\left[\frac{4}{3}(1+x)\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\right]_0^3-\int_0^3\frac{4}{3}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)dx$$

$$I=\left[\frac{4}{3}(1+x)\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\right]_0^3+\int_0^3\frac{4}{6}\left(e^{-2x}\right)dx$$

$$I=\left[\frac{4}{3}(1+x)\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\right]_0^3+\left[\frac{4}{6}\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)\right]_0^3=\left[-\frac{4}{6}(1+x)e^{-2x}\right]_0^3+\left[\frac{4}{-12}e^{-2x}\right]_0^3=$$

$$I=\left[-\frac{2}{3}(1+x)e^{-2x}\right]_0^3+\left[\frac{1}{-3}e^{-2x}\right]_0^3=$$

$$\left[-\frac{2}{3}(1+3)e^{-2\times3}\right]+\left[\frac{1}{-3}e^{-2\times3}\right]-\left[-\frac{2}{3}(1+0)e^{-2\times0}\right]-\left[\frac{1}{-3}e^{-2\times0}\right]=-\frac{8}{3}e^{-6}-\frac{1}{3}e^{-6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$$

$$I=-\frac{9}{3}e^{-6}+\frac{3}{3}=-3e^{-6}+1\approx 0{,}99.$$

I est la partie du plan dont les points M de coordonnées x et y vérifient :

$\begin{cases}0\le x\le 3\\0\le y\le f(x)\end{cases}$, cette aire est donnée (unités) en unités d'aires.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}t-1\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-2t}=0^+$ c'est une forme indéterminée mais la fonction exponentielle est prioritaire devant la fonction polynôme donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}t-1\right)e^{-2t}=0^-$.

c) $J=\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\left(-\frac{2}{3}t-1\right)e^{-2t}+1\right]=0^-+1=1^-$.

d) $J-I=J-A(3)=\lim\limits_{t\to+\infty}A(t)-A(3)=1-\left(-3e^{-6}+1\right)=1+3e^{-6}-1=3e^{-6}\approx 0{,}007$.

On a donc l'inégalité suivante : $0\le J-I\le 0{,}01$.

$J-I$ est l'aire de la partie du plan définie par les points M de coordonnées $(x;y)$ tels que : $\begin{cases}x\ge 3\\0\le y\le f(x)\end{cases}$.

La portion du plan compris entre : la courbe C, l'axe des abscisses et à droite de la verticale x = 3.