

## ETS 2000 Correction

### EXERCICE 1 :

#### A. Pannes mécaniques sur le bras articulé :

1° :

X suit une loi Binomiale car :

- deux issues possibles : en panne ou non ;
- 300 épreuves aléatoires indépendantes ;
- même probabilité de succès ( $p=0,05$ ) à chaque épreuve.

Les paramètres de cette loi sont :  $n=300$  et  $p=0,05$ .

2° :

X est approchée par la variable aléatoire Y qui suit une loi normale de moyenne  $\mu = n \times p = 300 \times 0,05 = 15$  et d'écart type :

$$\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{300 \times 0,05 \times 0,95} = \sqrt{14,25} \approx 3,77.$$

3° :

On se ramène à la loi normale centrée réduite  $N(0 ; 1)$  par le changement de variables suivant :  $T = \frac{Y - 15}{3,77}$ .

$$\begin{aligned} P(E) &= P(Y \geq 20,5) = P\left(T \geq \frac{20,5 - 15}{3,77}\right) = 1 - P\left(T < \frac{20,5 - 15}{3,77}\right) = 1 - P(T < 1,46) = 1 - \Phi(1,46) \\ &= 1 - 0,93 = 0,07. \end{aligned}$$

#### B. Défaillances des groupes hydrauliques :

$$P(A) = \frac{1}{3}; P(B) = \frac{2}{3}; P(D / A) = P_A(D) = 0,03; P(D / B) = P_B(D) = 0,02.$$

1° :

$P(D) = P((A \cap D) \cup (B \cap D)) = P(A \cap D) + P(B \cap D)$  car  $A \cap D$  et  $B \cap D$  sont incompatibles (disjoints). Et par la formule d'une probabilité conditionnelle, on

obtient la relation suivante :  $P_A(D) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(D \cap A) = P(A) \times P_A(D)$ .

$$\text{D'où : } P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = \frac{1}{3} \times 0,03 + \frac{2}{3} \times 0,02 = 0,01 + \frac{0,04}{3} \approx 0,023.$$

2° :

$$P(A/D) = P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \times P_A(D)}{P(D)} \approx \frac{0,01}{0,023} \approx 0,429.$$

### C. Maintenance du système électronique des armoires de contrôle :

1° :

a) Le coefficient de corrélation linéaire  $r = \sqrt{0,9882} \approx 0,99$  est très proche de 1 donc on a eu raison de choisir un ajustement linéaire.

b) Le paramètre  $\gamma$  est nul car le nuage de points est rectiligne.

c) L'équivalence encadrée suivante :  $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \Leftrightarrow y = \beta x - \beta \ln \eta$  appliquée à l'équation de droite donnée dans le second cadre (à côté du tableau) :  $y = 1,7522x - 8,2171$  nous permet de déduire que :  $\beta = 1,7522 \approx 1,75$  et  $\beta \ln \eta = 8,2171$ , d'où  $\ln \eta = \frac{8,2171}{1,75} \Leftrightarrow \eta = e^{\left(\frac{8,2171}{1,75}\right)} \approx 109,45 \approx 109$ .

2° :

Une fiabilité de 80% correspond à une probabilité de 0,8. On obtient donc :

$$R(t) = 0,8 \Leftrightarrow e^{-\left(\frac{t}{109}\right)^{1,75}} = 0,8 \Leftrightarrow \ln \left[ e^{-\left(\frac{t}{109}\right)^{1,75}} \right] = \ln(0,8) \Leftrightarrow -\left(\frac{t}{109}\right)^{1,75} = \ln(0,8) \Leftrightarrow -\frac{t^{1,75}}{109^{1,75}} = \ln(0,8)$$
$$\Leftrightarrow t^{1,75} = -109^{1,75} \times \ln(0,8) \Leftrightarrow t = \left(-109^{1,75} \times \ln(0,8)\right)^{\frac{1}{1,75}} \Leftrightarrow t \approx 46,26$$

D'où la périodicité d'interventions préventives est de 46 jours.

### EXERCICE 2 :

#### A. Résolution d'une équation différentielle :

1° :

$$(E_0) : y'' - 4y = 0$$

$$(EC) : r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\Delta = (0)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 16$$

$$\text{ou : } \Delta > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{0 + \sqrt{16}}{2} = 2; \quad r_2 = \frac{0 - \sqrt{16}}{2} = -2.$$

D'après le formulaire, les solutions générales de  $(E_0)$  sont de la forme :  $y_1(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$  avec  $C_1, C_2$  nombres réels.

2° :

$g$  est une solution particulière de  $(E)$  si et seulement si :  $g'' - 4g = -\frac{16}{3} e^{-2x}$ .

Il nous faut donc calculer  $g'$  pour avoir  $g''$  :

$$g(x) = \frac{4}{3}xe^{-2x}$$

$$U = \frac{4}{3}x \quad U' = \frac{4}{3}$$

$$V = e^{-2x} \quad V' = -2e^{-2x}$$

$$g'(x) = U'V + UV' = \frac{4}{3}e^{-2x} + \left(\frac{4}{3}x\right)(-2e^{-2x}) = e^{-2x}\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3}x\right).$$

$$g'(x) = e^{-2x}\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3}x\right)$$

$$U = e^{-2x} \quad U' = -2e^{-2x}$$

$$V = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}x \quad V' = -\frac{8}{3}$$

$$g''(x) = U'V + UV' = (-2e^{-2x})\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3}x\right) + e^{-2x}\left(-\frac{8}{3}\right) = e^{-2x}\left(-2\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3}x\right) - \frac{8}{3}\right)$$

$$= e^{-2x}\left(-\frac{8}{3} + \frac{16}{3}x - \frac{8}{3}\right) = e^{-2x}\left(\frac{16}{3}x - \frac{16}{3}\right).$$

On remplace tout cela dans le premier membre de (E) :

$$g'' - 4g = e^{-2x}\left(\frac{16}{3}x - \frac{16}{3}\right) - 4\left(\frac{4}{3}xe^{-2x}\right) = e^{-2x}\left(\frac{16}{3}x - \frac{16}{3} - \frac{16}{3}x\right) = e^{-2x}\left(-\frac{16}{3}\right).$$

Donc  $g$  est bien une solution particulière de (E).

**3° :**

Il suffit d'additionner les deux fonctions trouvées précédemment :

$$y(x) = y_1(x) + g(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \frac{4}{3}xe^{-2x}. \text{ Avec } C_1, C_2 \text{ nombres réels.}$$

**4° :**

$$\begin{cases} h(0) = \frac{4}{3} \\ h'(0) = -\frac{4}{3} \end{cases} \text{ conditions initiales qui vont permettre de trouver la valeur des}$$

deux constantes  $C_1$  et  $C_2$ .

$$y(0) = C_1e^{2 \times 0} + C_2e^{-2 \times 0} + \frac{4}{3} \times 0 \times e^{-2 \times 0} = C_1 + C_2$$

$$C_1 + C_2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3C_1 + 3C_2 = 4 \quad (1)$$

$$y'(x) = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} + \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3}x\right)e^{-2x}$$

$$y'(0) = 2C_1e^{2 \times 0} - 2C_2e^{-2 \times 0} + \left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3} \times 0\right)e^{-2 \times 0} = 2C_1 - 2C_2 + \frac{4}{3}$$

$$2C_1 - 2C_2 + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$2C_1 - 2C_2 = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3}$$

$$2C_1 - 2C_2 = -\frac{8}{3}$$

$$6C_1 - 6C_2 = -8 \Leftrightarrow 3C_1 - 3C_2 = -4 \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) forment un système d'équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3C_1 + 3C_2 = 4 \\ 3C_1 - 3C_2 = -4 \end{cases} \quad \text{on additionne les deux équations et on obtient :}$$

$$6C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$3C_2 = 4 - 3C_1 = 4 - 0 = 4 \Leftrightarrow C_2 = \frac{4}{3} \quad \text{d'où}$$

$$h(x) = \frac{4}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}xe^{-2x} = e^{-2x}\left(\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\right) = e^{-2x} \frac{4}{3}(x+1).$$

## B. Etude d'une fonction :

### 1° :

a) On va calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  en utilisant la formule :  $(UV)' = U'V + UV'$ .

$$U = \frac{4}{3}(x+1) \quad U' = \frac{4}{3}$$

$$V = e^{-2x} \quad V' = -2e^{-2x}$$

$$f'(x) = U'V + UV' = \frac{4}{3}e^{-2x} + \left(\frac{4}{3}(x+1)\right)(-2e^{-2x}) = e^{-2x}\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}\right)$$

$$= e^{-2x}\left(-\frac{8}{3}x - \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}(2x+1)e^{-2x}$$

b)  $-\frac{4}{3} < 0$  ,  $e^{-2x} > 0$  pour tout  $x$  réel, de plus l'intervalle d'étude de la

fonction  $f$  est  $[0; +\infty[$  ( $x$  ne peut être que positif ou nul !) donc  $2x+1 > 0$ .

Ces trois parties sont multipliées entre elles ; par la règle des signes, le total, c'est-à-dire la dérivée de  $f$ , est strictement négative.

$f$  est donc une fonction strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

### 2° :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0^+$  c'est une forme indéterminée mais la fonction

exponentielle est prioritaire devant la fonction polynôme donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ .

La limite obtenue traduit géométriquement la présence d'une asymptote horizontale en  $+\infty$  d'équation  $y=0$ .

### 3° :

a) DL d'ordre 3 par le formulaire :  $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3 \varepsilon(t)$  avec  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ .

On change de variable : t en -2x et on obtient :

$$e^{-2x} = 1 + \frac{-2x}{1!} + \frac{(-2x)^2}{2!} + \frac{(-2x)^3}{3!} + (-2x)^3 \varepsilon(-2x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{-8x^3}{6} - 8x^3 \varepsilon(-2x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3 \varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon'(x) = 0$$

b) On reconstruit à partir du DL précédent la fonction f en multipliant la partie régulière par  $\frac{4}{3}(x+1)$  :

$$e^{-2x} \left( \frac{4}{3}(x+1) \right) = \left( 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) \left( \frac{4}{3}(x+1) \right) + x^3 \varepsilon'(x)$$

$$f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{4}{3} - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}x^2 - \frac{16}{9}x^3 + x^3 \varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon'(x) = 0$$

$$f(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}x^3 + x^3 \varepsilon'(x)$$

c) Equation de la tangente T :  $y = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x$ .

L'étude du signe de  $\frac{8}{9}x^3$  sur  $[0; +\infty[$  va nous indiquer les positions de C et T au voisinage de 0.

Quand  $x = 0$  C intercepte T

Quand  $x > 0$  C est au dessus de T.

### 4° :

$$a) I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \frac{4}{3}(1+x)e^{-2x} dx$$

Méthode d'intégration par parties :

$$U = \frac{4}{3}(1+x) \quad U' = \frac{4}{3}$$

$$V' = e^{-2x} \quad V = \frac{e^{-2x}}{-2} = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

La formule donne :

$$\begin{aligned}
I &= [UV]_0^3 - \int_0^3 U \cdot V \\
I &= \left[ \frac{4}{3}(1+x) \left( -\frac{e^{-2x}}{2} \right) \right]_0^3 - \int_0^3 \frac{4}{3} \left( -\frac{e^{-2x}}{2} \right) dx \\
I &= \left[ \frac{4}{3}(1+x) \left( -\frac{e^{-2x}}{2} \right) \right]_0^3 + \int_0^3 \frac{4}{6} (e^{-2x}) dx \\
I &= \left[ \frac{4}{3}(1+x) \left( -\frac{e^{-2x}}{2} \right) \right]_0^3 + \left[ \frac{4}{6} \left( \frac{e^{-2x}}{-2} \right) \right]_0^3 = \left[ -\frac{4}{6}(1+x)e^{-2x} \right]_0^3 + \left[ \frac{4}{-12} e^{-2x} \right]_0^3 = \\
I &= \left[ -\frac{2}{3}(1+x)e^{-2x} \right]_0^3 + \left[ \frac{1}{-3} e^{-2x} \right]_0^3 = \\
\left[ -\frac{2}{3}(1+3)e^{-2 \times 3} \right] + \left[ \frac{1}{-3} e^{-2 \times 3} \right] - \left[ -\frac{2}{3}(1+0)e^{-2 \times 0} \right] - \left[ \frac{1}{-3} e^{-2 \times 0} \right] &= -\frac{8}{3}e^{-6} - \frac{1}{3}e^{-6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \\
I &= -\frac{9}{3}e^{-6} + \frac{3}{3} = -3e^{-6} + 1 \approx 0,99.
\end{aligned}$$

I est la partie du plan dont les points M de coordonnées x et y vérifient :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}, \text{ cette aire est donnée (unités) en unités d'aires.}$$

b)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2}{3}t - 1 \right) = -\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = 0^+$  c'est une forme indéterminée mais

la fonction exponentielle est prioritaire devant la fonction polynôme donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2}{3}t - 1 \right) e^{-2t} = 0^-.$$

c)  $J = \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \left( -\frac{2}{3}t - 1 \right) e^{-2t} + 1 \right] = 0^- + 1 = 1^-.$

d)  $J - I = J - A(3) = \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) - A(3) = 1 - (-3e^{-6} + 1) = 1 + 3e^{-6} - 1 = 3e^{-6} \approx 0,007.$

On a donc l'inégalité suivante :  $0 \leq J - I \leq 0,01.$

J - I est l'aire de la partie du plan définie par les points M de coordonnées (x; y) tels que :  $\begin{cases} x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}.$

La portion du plan compris entre : la courbe C, l'axe des abscisses et à droite de la verticale x = 3.