BTS 2001
Correction

EXERCICE 1 :

Partie A :

1° :

X suit une loi Binomiale car :
- deux issues possibles : conforme ou non conforme ;
- 10 épreuves aléatoires indépendantes ;
- même probabilité de succès (p=0,9) à chaque épreuve.

Les paramètres de cette loi sont : n=10 et p=0,9.

2° :

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = C_{10}^{8} 0{,}9^{8} 0{,}1^{2} + C_{10}^{9} 0{,}9^{9} 0{,}1^{1} + C_{10}^{10} 0{,}9^{10} 0{,}1^{1}$$
$$= 0{,}9298 \approx 0{,}930.$$

Partie B :

1° :

On se ramène à la loi normale centrée réduite N(0 ;1) par le changement de variables suivant : $T = \dfrac{M - 250}{1{,}94}$.

$$P(246 \leq M \leq 254) = P\left(\frac{246 - 250}{1{,}94} \leq T \leq \frac{254 - 250}{1{,}94}\right) = P(-2{,}06 \leq T \leq 2{,}06) = 2\Pi(2{,}06) - 1$$
$$= 2 \times 0{,}9803 - 1 = 0{,}961.$$

2° :

On se ramène à la loi normale centrée réduite N(0 ;1) par le changement de variables suivant : $T = \dfrac{N - 150}{1{,}52}$.

$$P(147 \leq N \leq 153) = P\left(\frac{147 - 150}{1{,}52} \leq T \leq \frac{153 - 150}{1{,}52}\right) = P(-1{,}97 \leq T \leq 1{,}97) = 2\Pi(1{,}97) - 1$$
$$= 2 \times 0{,}9756 - 1 = 0{,}951.$$

3° :

M et N sont des variables indépendantes donc :
$$P(\text{"conforme"}) = P(246 \leq M \leq 254) \times P(147 \leq N \leq 153) = 0{,}961 \times 0{,}951 = 0{,}9139 \approx 0{,}914.$$

Partie C :

1° :

$P(A) = 0{,}6$

$P(B) = 0{,}4$

$P(C/A) = P_A(C) = 0{,}914$

$P(C/B) = P_B(C) = 0{,}879.$

2° :

$P(C \cap A) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}6 \times 0{,}914 \approx 0{,}548;$

$P(C \cap B) = P(B) \times P_B(C) = 0{,}4 \times 0{,}879 \approx 0{,}352.$

3° :

$P(C) = P\big((C \cap A) \cup (C \cap B)\big) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = 0{,}548 + 0{,}352 = 0{,}9.$

Cette formule est possible car $C \cap A$ et $C \cap B$ sont des événements disjoints (ou incompatibles).

EXERCICE 2 :

Partie A :

1° :

$(E_0) : y' - 2y = 0$ on applique le formulaire :

$a = 1; b = -2$

$\frac{b}{a} = \frac{-2}{1} = -2$ Primitive de $\frac{b}{a}$: $G(x) = -2x$ donc une solution générale de (E_0) est

$y_1(x) = ke^{-G(x)} = ke^{2x}$ avec k constante réelle.

2° :

Si h est une solution particulière de (E) alors h vérifie : $h' - 2h = e^{2x}$.

Pour obtenir h' il nous faut dériver h :

$h(x) = xe^{2x}$

$U = x$ $U' = 1$

$V = e^{2x}$ $V' = 2e^{2x}$ $h'(x) = U'V + UV' = 1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x).$

On remplace cela dans (E) :

(E) : $h' - 2h = e^{2x}(1 + 2x) - 2(xe^{2x}) = e^{2x}(1 + 2x - 2x) = e^{2x}$ ce qui est bien égal au second membre de l'équation (E).

Donc h est une solution particulière de (E).

3° :

L'ensemble des solutions de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) avec une solution particulière de (E).

$y(x) = ke^{2x} + xe^{2x} = e^{2x}(k + x)$ avec k constante réelle.

4° :

Condition initiale : $f(0) = -1$.

$y(0) = e^{2\times 0}(k+0) = e^0 k = 1\times k = k$ donc k=-1 et $f(x) = e^{2x}(-1+x)$.

Partie B :

1° :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0^+$ c'est une forme indéterminée mais la fonction exponentielle est prioritaire devant la fonction polynôme donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$.

c) La limite obtenue au b) traduit géométriquement la présence d'une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation y=0.

2° :

a)

$f(x) = (x-1)e^{2x}$

$U = x-1$ $\quad\quad U' = 1$

$V = e^{2x}$ $\quad\quad V' = 2e^{2x}$

$f'(x) = U'V + UV' = 1\times e^{2x} + (x-1)\times 2e^{2x} = e^{2x}(1+2x-2) = e^{2x}(2x-1)$.

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0$ car $e^{2x} > 0$ pour tout x réel.

$2x-1\geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq 0{,}5$.

c) Tableau de variations :

x	$-\infty$		0,5		$+\infty$
Sign(f'(x))		-	0	+	
f	0^-	↘	$-\frac{e}{2}$	↗	$+\infty$

3° :

a) DL d'ordre 3 par le formulaire : $e^t \overset{0}{=} 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + t^3\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

On change de variable : t en 2x et on obtient :

$e^{2x} \overset{0}{=} 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + (2x)^3\varepsilon(2x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

$$e^{2x} \overset{0}{=} 1+\frac{2x}{1}+\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{6}+8x^3\varepsilon(2x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$e^{2x} \overset{0}{=} 1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+8x^3\varepsilon(2x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

b) On reconstruit à partir du DL précédent la fonction f en multipliant la partie régulière par $x-1$:

$$e^{2x}(x-1) \overset{0}{=} \left(1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}\right)(x-1)+8x^3\varepsilon(2x)=x-1+2x^2-2x+2x^3-2x^2-\frac{4x^3}{3}+x^3\varepsilon(2x)$$

$$f(x) \overset{0}{=} -1-x+\frac{2}{3}x^3+x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

c) Equation de la tangente $T_0 : y=-1-x$.

L'étude du signe de $\frac{2}{3}x^3$ va nous indiquer les positions de C et T_0.

Quand $x<0$ C est au dessous de T

Quand x = 0 C intercepte T

Quand $x>0$ C est au dessus de T.

d) Voir annexe.

Partie C :

1° :

Intégration par parties : $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}(x-1)e^{2x}dx$

On pose : $U=x-1$ on calcule $U=1$

On pose : $V'=e^{2x}$ on calcule $V=\frac{e^{2x}}{2}$

D'où :

$$I(\alpha)=\left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\alpha}^{0}-\int_{\alpha}^{0}1\times\frac{e^{2x}}{2}dx=\left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\alpha}^{0}-\int_{\alpha}^{0}\frac{e^{2x}}{2}dx=$$

$$\left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\alpha}^{0}-\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{\alpha}^{0}=\left(-1\frac{e^{0}}{2}\right)-\left((\alpha-1)\frac{e^{2\alpha}}{2}\right)-\left(\frac{e^{0}}{4}-\frac{e^{2\alpha}}{4}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}e^{2\alpha}+\frac{1}{2}e^{2\alpha}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2\alpha}$$

$$=-\frac{3}{4}-e^{2\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}\right).$$

2° :

a) $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = -\dfrac{3}{4}$ car : $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} e^{2x} = 0^+$ et $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{3}{4}\right) = -\infty$

C'est une forme indéterminée mais la fonction exponentielle est prioritaire devant la fonction polynôme donc $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} e^{2\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{3}{4}\right) = 0^-$.

Il reste à additionner avec $-\dfrac{3}{4}$!

b) $-\dfrac{3}{4}$ représente l'opposé de l'aire du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe C et l'axe des ordonnées. Cette aire de $\dfrac{3}{4}$ serait exprimée en unités d'aires (partie hachurée).