BTS 2003 A.T.I-F.E.E
Correction

EXERCICE 1 :

1° :

a) $P(E_1)=P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}04\times 0{,}02=0{,}0008$ car A et B sont des évènements indépendants.

b) $P(E_2)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}04+0{,}02-0{,}0008=0{,}0592$.

2° :

a) $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$
$P(X\le 2)=0{,}6065+0{,}3033+0{,}0758=0{,}9856$.

b) $P(X\le 4)=P(X\le 2)+P(X=3)+P(X=4)$
$P(X\le 4)=0{,}9856+0{,}0126+0{,}0016=0{,}9998$.

ou $P(X\le 4)=1-P(X>4)=1-0{,}0002=0{,}9998$.

c) $P(X\le n)\ge 0{,}99 \Rightarrow n=3$ par lecture de la table.

3° :

On se ramène à la loi normale centrée réduite N(0 ;1) par le changement de variables suivant : $T=\dfrac{Y-1{,}5}{0{,}01}$.

$P(1{,}47\le T\le 1{,}53)=P\left(\dfrac{1{,}47-1{,}5}{0{,}01}\le T\le \dfrac{1{,}53-1{,}5}{0{,}01}\right)=P(-3\le T\le 3)=2\Pi(3)-1=2\times 0{,}99865-1$

$=0{,}9973\approx 0{,}997$.

On a 99,7% de « chance » d'avoir une bouteille conforme à la norme.

4° :

a) Z suit la loi Normale de paramètre $N(\mu;0{,}01)$.

$\overline{Z}$ suit la loi Normale de paramètre $N(m;\sigma)$ avec $m=\mu=1{,}5$ et $\sigma=\dfrac{0{,}01}{\sqrt{n}}=\dfrac{0{,}01}{\sqrt{100}}=0{,}001$.

b) On se ramène à la loi normale centrée réduite N(0 ;1) par le changement de variables suivant : $T = \dfrac{\overline{Z} - 1{,}5}{0{,}001}$.

$$P(1{,}5 - h \le \overline{Z} \le 1{,}5 + h) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(\frac{1{,}5 - h - 1{,}5}{0{,}001} \le T \le \frac{1{,}5 + h - 1{,}5}{0{,}001}\right) = 0{,}95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0{,}001} \le T \le \frac{h}{0{,}001}\right) = 0{,}95 \Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0{,}001}\right) - 1 = 0{,}95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0{,}001}\right) = \frac{0{,}95 + 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0{,}001}\right) = 0{,}975$$

Par une lecture inverse de la table (on cherche 0,975 comme probabilité et on récupère la valeur de t sur les « bords »), on obtient :

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
$\boxed{1{,}9}$	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	$\boxed{0{,}975\ 0}$	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

Donc on lit : $\dfrac{h}{0{,}001} = 1{,}96 \Leftrightarrow h = 1{,}96 \times 0{,}001 = 0{,}00196 \approx 0{,}002$

c) On prélève un échantillon, si le résultat de sa statistique est à l'extérieur de l'intervalle : $[1{,}5-0{,}002;1{,}5+0{,}002]=[1{,}498;1{,}502]$, on conclut que l'évènement ne peut se réaliser qu'avec une hypothèse de 5% si l'hypothèse est exacte. Par contre, si on est à l'intérieur de l'intervalle alors il y a 95% de chance de se réaliser si l'hypothèse est exacte.

d) $m_e = 1{,}495$ on est donc à l'extérieur de l'intervalle. Au seuil de 5%, on a comme résultat : la machine est mal réglée.

EXERCICE 2 :

A. Résolution d'une équation différentielle :

1° :

$(E_0): y'+y=0$ on applique le formulaire :

$a=1; b=1$

$\frac{b}{a}=\frac{1}{1}=1$ Primitive de $\frac{b}{a}: G(x)=x$ donc une solution générale de (E_0) est

$$y_1(x)=ke^{-G(x)}=ke^{-x} \text{ avec k constante réelle.}$$

2° :

Si h est une solution particulière de (E) alors h vérifie : $h'+h=2e^{-x}$.

Pour obtenir h' il nous faut dériver h :

$h(x)=2xe^{-x}$

$U=2x$ $U'=2$

$V=e^{-x}$ $V'=-e^{-x}$ $h'(x)=U'V+UV'=2\times e^{-x}+2x\times\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}(2-2x)$.

On remplace cela dans (E) :

(E) : $h'+h=e^{-x}(2-2x)+(2xe^{-x})=e^{-x}(2-2x+2x)=2e^{-x}$ ce qui est bien égal au second membre de l'équation (E).

Donc h est une solution particulière de (E).

3° :

L'ensemble des solutions de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) avec une solution particulière de (E).

$y(x)=ke^{-x}+2xe^{-x}=e^{-x}(k+2x)$ avec k constante réelle.

4° :

Condition initiale : $f(0)=3$.

$y(0)=e^{-0}(k+2\times 0)=e^{0}k=1\times k=k$ donc k=3 et $f(x)=e^{-x}(3+2x)$.

B. Etude d'une fonction :

1° :

a) Par lecture graphique on lit : $f(0)=3$. (abscisse : 0, ordonnée : 3).

b) $f'(0)$ représente le coefficient directeur (pente) de la tangente à C au point d'abscisse 0. Cette tangente est en fait la droite Δ, et elle a comme pente la valeur : $f'(0)=-1$.

c) Les deux questions précédentes nous permettent de mettre en place le système d'équations suivant :

$$(S)\begin{cases} f(0)=3 \\ f'(0)=-1 \end{cases} \text{ avec } f(x)=(ax+b)e^{-x}$$

On a besoin de la dérivée de f :

$U=ax+b \qquad U'=a$

$V=e^{-x} \qquad V'=-e^{-x}$

$f'(x)=U'V+UV'=ae^{-x}+(ax+b)\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}(-ax+a-b)$

Le système (S) devient :

$$(S)\begin{cases} (a\times 0+b)e^{-0}=3 \\ (-a\times 0+a-b)e^{-0}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=-1+b=2 \end{cases}$$

Donc on a : $f(x)=(2x+3)e^{-x}$. (C'est le même résultat que la partie A !!).

2° :

a) On va se servir de la forme dérivée obtenue à la question 1° avec la valeur des coefficients a et b trouvés :

$f'(x)=(-2x+2-3)e^{-x}=(-2x-1)e^{-x}$.

b) $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -2x-1\geq 0$ car $e^{-x}>0$ pour tout x réel.

$-2x-1\geq 0 \Leftrightarrow -2x\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\leq -0{,}5.$

c) Tableau de variations :

x	$-\infty$		- 0,5		$+\infty$
Sign(f'(x))		+	0	-	
f		↗	$2e^{0,5}$	↘	

3° :

a) DL d'ordre 2 par le formulaire : $e^t \overset{0}{=} 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$.

On change de variable : t en -x et on obtient :

$$e^{-x} \overset{0}{=} 1 + \frac{-x}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + (-x)^2 \varepsilon(-x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$e^{-x} \overset{0}{=} 1 + \frac{-x}{1} + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(-x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$e^{-x} \overset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon'(x) = 0$$

b) On reconstruit à partir du DL précédent la fonction f en multipliant la partie régulière par $(2x+3)$:

$$e^{-x}(2x+3) \overset{0}{=} \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)(2x+3) + x^2 \varepsilon'(x) = 2x - 2x^2 + \frac{2x^3}{3} + 3 - 3x + \frac{3x^2}{2} + x^2 \varepsilon'(x)$$

$$f(x) \overset{0}{=} 3 - x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon'(x) = 0$$

C. Calcul Intégral :

1° :

$$f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$$

$$F(x) = -f(x) + \frac{2e^{-x}}{-1} + k \ , \ k \in \mathbb{R}.$$

$$F(x) = -(2x+3)e^{-x} - 2e^{-x} + k \ , \ k \in \mathbb{R}.$$

$$F(x) = (-2x-5)e^{-x} + k \ , \ k \in \mathbb{R}.$$

2° :

a)

$$I = \int_0^{0,5} f(x)dx = [F(x)]_0^{0,5} = F(0,5) - F(0) = \left((-2 \times 0,5 - 5)e^{-0,5}\right) - \left((-2 \times 0 - 5)e^{-0}\right) = -6e^{-0,5} + 5.$$

b) $I \approx 1,361$.

3° :

a)

$$J = \int_0^{0,5} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{x^3}{3}\right]_0^{0,5} = \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^{0,5}$$

$$= \left(3 \times 0,5 - \frac{0,5^2}{2} - \frac{0,5^3}{6}\right) - \left(3 \times 0 - \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{6}\right) = \frac{65}{48} - 0 = \frac{65}{48}.$$

b) $J \approx 1,354$.

c) $I - J \approx 1,361 - 1,354 \approx 0,007 < 0,01$.
Donc I et J différent de moins de 10^{-2}.

Au niveau de l'interprétation graphique de cette valeur :
$I - J$ *représente l'écart entre la courbe représentative de f et la parabole issue du développement limité en 0.*