BTS 2004
Correction

EXERCICE 1 :

A. *Loi normale*

1° :

On se ramène à la loi normale centrée réduite N(O ;1) par le changement de variables suivant : $T = \frac{X-100}{0,25}$.

$$P(99,45 \le X \le 100,55) = P\left(\frac{99,45-100}{0,25} \le T \le \frac{100,55-100}{0,25}\right) = P(-2,2 \le T \le 2,2)$$

$$= 2\Pi(2,2) - 1 = 2 \times 0,9861 - 1 = 0,9722.$$

2° :

$$P(100-h \le X \le 100+h) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\frac{100-h-100}{0,25} \le T \le \frac{100+h-100}{0,25}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0,25} \le T \le \frac{h}{0,25}\right) = 0,95 \Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{h}{0,25}\right) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0,25}\right) = \frac{0,95+1}{2} = 0,975$$

Par la lecture inverse de la table, on lit : $\frac{h}{0,25} = 1,96 \Leftrightarrow h = 0,25 \times 1,96 = 0,49.$

$100-0,49 = 99,51$ et $100+0,49 = 100,49$, donc on a 95 % de chance d'avoir la longueur d'une pièce comprise entre 99,51 mm et 100,49 mm.

B. *Loi binomiale et loi de Poisson*

1° :

Y suit une loi binomiale car elle vérifie les trois critères suivant :
- 50 épreuves indépendantes aléatoires ;
- 2 issues possibles à chaque épreuve : conforme ou non conforme ;
- même probabilité de réussite (non conforme)à chaque épreuve : p = 0,03.

Les deux paramètres de cette loi sont : B(50 ; 0,03).

2° :

$$P(Y=2) = C_{50}^{2} \times 0,03^{2} \times 0,97^{48} = 0,26.$$

26% de chance d'avoir deux tiges non conformes dans le lot.

3° :

$$P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$$
$$= C_{50}^{0} \times 0{,}03^{0} \times 0{,}97^{50} + C_{50}^{1} \times 0{,}03^{1} \times 0{,}97^{49} + C_{50}^{2} \times 0{,}03^{2} \times 0{,}97^{48}$$
$$= 0{,}22 + 0{,}34 + 0{,}26 = 0{,}82.$$

82% de chance d'avoir au plus deux tiges non conformes dans le lot.

4° :

Le paramètre de la loi de Poisson est : $\lambda = n \times p = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5.$

5° :

$P(Z=2) = 0{,}25.$ Lecture de la table.

$P(Y \leq 2) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) = 0{,}22 + 0{,}33 + 0{,}25 = 0{,}80.$ Lecture de la table.

C. *Intervalle de confiance*

1° :

$\mu = \bar{x} = 9{,}99$ mm.

2° :

95% de confiance correspond à une valeur de t = 0,96. L'intervalle se calcule alors par la formule suivante :

$$\left[\bar{x} - t\sqrt{\frac{\sigma}{n}};\bar{x} + t\sqrt{\frac{\sigma}{n}}\right] = \left[9{,}99 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}19}{50}};9{,}99 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}19}{50}}\right] = [9{,}94;10{,}04].$$

3° :

Non, pas **obligatoirement :** 5% de probabilité que cela ne marche pas !.

EXERCICE 2 :

A. *Résolution d'une équation différentielle*

1° :

$(E_0) : y' + (0{,}4x)y = 0$

$\frac{b}{a} = \frac{0{,}4x}{1} = 0{,}4x$

Une primitive de $x \mapsto 0{,}4x$ est $x \mapsto 0{,}2x^2$

Donc les solutions générales de (E_0) sont : $y_1(x) = ke^{-0{,}2x^2}$ avec k réel.

2° :

$h : x \mapsto 1$ est solution particulière de (E) si elle vérifie cette équation :
$(E) : h' + (0{,}4x)h = 0{,}4x$.

Dérivée de h : $h'(x) = 0$.

$(E) : h' + (0{,}4x)h = 0 + (0{,}4x) \times 1 = 0{,}4x.$ Donc h est bien solution particulière de (E).

3° :

L'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions y définies ainsi :
$y(x)=y_1(x)+h(x)=ke^{-0,2x^2}+1$ avec k réel.

4° :

Condition initiale : F(0)=0 ; on l'applique à y solution générale de (E) :

$y(0)=ke^{-0,2\times0^2}+1=k+1$

$k+1=0 \Leftrightarrow k=-1$

donc : $F(x)=-e^{-0,2x^2}+1$.

B. *Etude d'une fonction*

1° :

Cette limite traduit la présence d'une asymptote horizontale y = 0 à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

2° :

a) $f(x)=0,4xe^{-0,2x^2}$

$U=0,4x \qquad U'=0,4$

$V=e^{-0,2x^2} \qquad V'=-0,4xe^{-0,2x^2}$

$f'(x)=U'V+UV'=(0,4)\times\left(e^{-0,2x^2}\right)+(0,4x)\times\left(-0,4xe^{-0,2x^2}\right)=e^{-0,2x^2}\left(-0,16x^2+0,4\right)$

$=e^{-0,2x^2}0,4\left(-0,4x^2+1\right)=e^{-0,2x^2}0,4\left(1+\sqrt{0,4}x\right)\left(1-\sqrt{0,4}x\right)$

b) $\mathrm{Sign}[f'(x)]=\mathrm{Sign}\left[\left(1-\sqrt{0,4}x\right)\right]$ car $e^{-0,2x^2}>0$ sur IR, $0,4\left(1+\sqrt{0,4}x\right)>0$ sur $[0;+\infty[$.

$1-\sqrt{0,4}x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{0,4}}=\dfrac{5\sqrt{0,4}}{2}\approx 1,58$.

c)

x	0		1,58		$+\infty$
Sign(f'(x))		+	0	-	
f	0	↗	0,38	↘	0

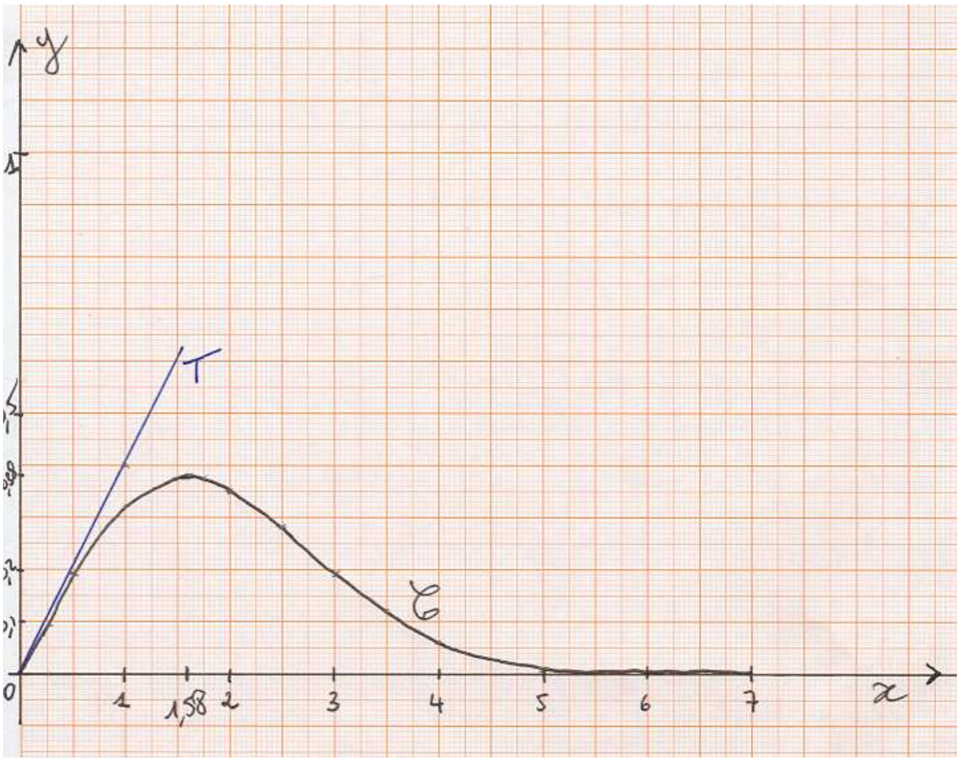
3° :

$f(x)\overset{0}{=}0,4x-0,08x^3+x^3\varepsilon(x)$, $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x)=0$ donc $T: y=0,4x$.

Les positions relatives de C et T sont données par l'étude du signe de $-0,08x^3$ autour de 0 :

Quand $x>0$, $-0,08x^3<0$ donc C est au dessous de T ;
Quand $x<0$, $-0,08x^3>0$ donc C est au dessus de T ;
Quand x = 0 , C et T sont tangentes.

<u>4° :</u>



<u>C. Application à un problème de probabilité. Etude d'une fonction</u>

<u>1° :</u>

$$P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-0,2x^2}.$$

$$\text{Donc } P(X \leq 4) = \int_0^4 f(t)dt = 1 - e^{-0,2\times 4^2} = 1 - e^{-3,2} = 0,96.$$

96% de chance que la ville soit protégée.

<u>2° :</u>

a)

$$P(X \leq x_0) = \int_0^{x_0} f(t)dt = 1 - e^{-0,2{x_0}^2} = 0,99 \Leftrightarrow -e^{-0,2{x_0}^2} = 0,99 - 1.$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,2{x_0}^2} = 0,01.$$

b) $$e^{-0,2{x_0}^2} = 0,01 \Leftrightarrow \ln\left(e^{-0,2{x_0}^2}\right) = \ln 0,01 \Leftrightarrow -0,2x^2 = \ln 0,01 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{\ln 0,01}{-0,2}$$

$$\Leftrightarrow x_0 = +\sqrt{\frac{\ln 0,01}{-0,2}} \approx 4,8 \quad (4,7985) \text{ car } x_0 \geq 0.$$

c) Oui car (4,8+1=5,8).