BTS 2005 CORRECTION

Exercice 1 :

A – Résolution d'une équation différentielle

1° On résout l'équation différentielle du premier ordre sans second membre (E_0) en utilisant le formulaire officiel du BTS :

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

$(E_0) : (1+x)y' + y = 0$ $\quad \begin{cases} a = 1+x \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{1+x}$

Soit G une primitive de $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow G(x) = \ln(1+x)$ on a donc

$y_1(x) = ke^{-\ln(1+x)} = ke^{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)} = k \times \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{k}{1+x}$ avec k constante réelle.

La solution générale de (E_0) est la fonction : $y_1(x) = \dfrac{k}{1+x}$ avec k une constante réelle restant à déterminer (à faire dans la question **4**°).

Une solution générale contient toujours une constante non déterminée, une solution particulière est complète !

2° Si g est une solution particulière de (E) alors g vérifie : $(1+x)g' + g = \dfrac{1}{1+x}$.

Pour démontrer cela on a besoin de la dérivée de g.

On va utiliser la formule de dérivée suivante : $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$

Avec : $U = \ln(1+x) \Rightarrow U' = \dfrac{1}{1+x}$ et $V = 1+x \Rightarrow V' = 1$

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{1+x}\times(1+x)-\ln(1+x)\times 1}{(1+x)^2}=\frac{\frac{1+x}{1+x}-\ln(1+x)}{(1+x)^2}=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

Une fois la dérivée de g obtenue, on remplace g et g' dans le premier membre de (E) et on vérifie que l'on obtient bien le second membre de (E) :

$$(E)\ :\ (1+x)g'+g=(1+x)\times\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\frac{1-\ln(1+x)}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\frac{1}{1+x}.$$

On retombe bien sur le second membre de l'équation différentielle (E) : cette étape prouve bien que g est une solution générale de (E).

3° Une solution générale de (E) est la somme d'une solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E) :

SG(E) = SG(E_0) + SP(E)

$$y(x)=y_1(x)+g(x)$$

$$y(x)=\frac{k}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\frac{k+\ln(1+x)}{1+x}$$

avec k constante réelle.

4° La donnée d'une condition initiale (C.I) $f(0)=2$ permet de déterminer la valeur de la constante k qui vérifie cette condition.

$f(0)=y(0)=\frac{k+\ln(1+0)}{1+0}=\frac{k+\ln(1)}{1}=k$ et $f(0)=2\Rightarrow k=2$.

On a donc comme solution particulière de (E) la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$$

B – *Etude d'une fonction*

1° ***Une remarque à faire avant de répondre à la question : il y a une faute dans l'énoncé ! En effet la limite de f en –1 est impossible : l'intervalle d'étude est ouvert en –1 !! L'énoncé devrait être le suivant :*** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$**.**

Cette remarque ayant été faite, on peut passer à la réponse.

Il ne s'agit pas de trouver les limites de f en -1^+ et en $+\infty$ mais simplement d'interpréter ces résultats graphiquement c'est à dire parler d'**asymptotes**.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ traduit la présence pour C d'une asymptote verticale à droite de –1 d'équation : $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ traduit la présence pour C d'une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation : y = 0.

2° **a)** Il nous faut dériver f et vérifier que notre résultat est le même que celui donné dans la question.

Pour dériver f on va utiliser la formule de dérivée suivante : $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$

Avec : $U = 2 + \ln(1+x) \Rightarrow U' = 0 + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$ et $V = 1 + x \Rightarrow V' = 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - [2 + \ln(1+x)] \times 1}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1+x}{1+x} - [2 + \ln(1+x)]}{(1+x)^2} = \frac{1 - 2 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}.$$

Ça marche !

b) Résolution de l'inéquation : $-1 - \ln(1+x) \geq 0$

$-1 - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln(1+x) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq -1 \Leftrightarrow e^{\ln(1+x)} \leq e^{-1} \Leftrightarrow 1 + x \leq e^{-1} \Leftrightarrow x \leq e^{-1} - 1$

On peut ainsi en déduire le signe de la dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$

Le dénominateur : $(1+x)^2$ est strictement positif (carré et intervalle d'étude) ;

Le signe du numérateur est donné par la résolution de l'inéquation précédente :

$-1 - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^{-1} - 1$

$e^{-1} - 1 \approx -0{,}63$ est la **racine de ce numérateur**.

Le **tableau de signe de la dérivée** est le suivant :

x	-1	$-0{,}63$	$+\infty$
Sign[f′(x)]	+		-

c) Tableau de variation de f :

x	-1		- 0,63		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	2,71	↘	0^+

$f(e^{-1}-1)=e.$

3° Il ne s'agit pas de démontrer le développement limité de f, à l'ordre 2, au voisinage de 0, mais de savoir l'utiliser et l'interpréter.

a) Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est la partie régulière du DL de f à l'ordre 1 :

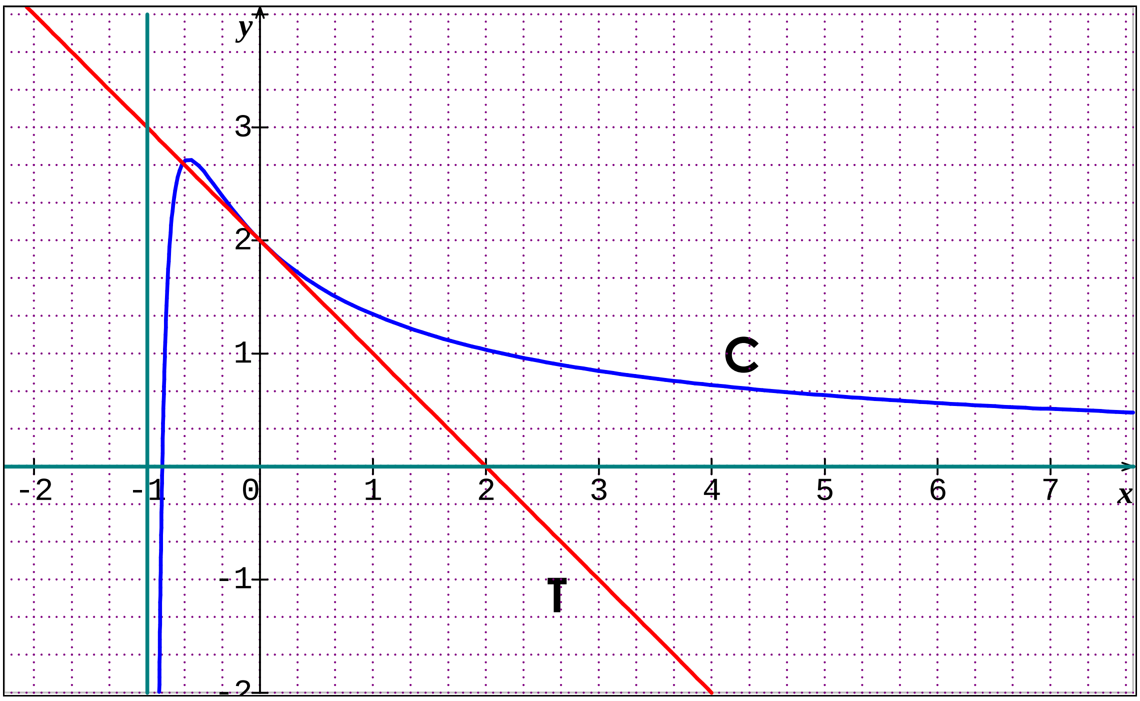
$$T : y = 2 - x$$

b) La position relative de C et T autour du point d'abscisse 0 est donnée par l'étude du signe de $[f(x)-y_T]$ à partir du DL précédent.

$[f(x)-y_T]=\frac{1}{2}x^2$ et $\frac{1}{2}x^2 \geq 0$ autour de 0.

On en conclue donc que la courbe C est au dessus de la tangente T autour du point d'abscisse 0.

Cette position est vérifiée graphiquement :



C – Calcul intégral

1° Pour dériver G on va utiliser la formule de dérivée suivante : $\left(U^{\alpha}\right)' = \alpha U^{\alpha-1}U'$

avec $U = \ln(1+x)$ et $\alpha = 2$.

$$U = \ln(1+x) \Rightarrow U' = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow G'(x) = \frac{1}{2}\left[2\times\left(\ln(1+x)\right)^{2-1}\times\frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2\ln(1+x)}{1+x}\right] = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

2° On transforme la fonction f pour pouvoir utiliser la réponse de la question précédente :

$$f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x} = \frac{2}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} \Rightarrow F(x) = 2\ln(1+x) + G(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]^2.$$

3° **a)** On va utiliser la question **2°** pour calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

$$I = \int_0^2 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^2 = F(2) - F(0) = \left(2\ln 3 + \frac{1}{2}(\ln 3)^2\right) - \left(2\ln 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right) = 2\ln 3 + \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

$I = \ln 3(2 + 0{,}5\ln 3)$.

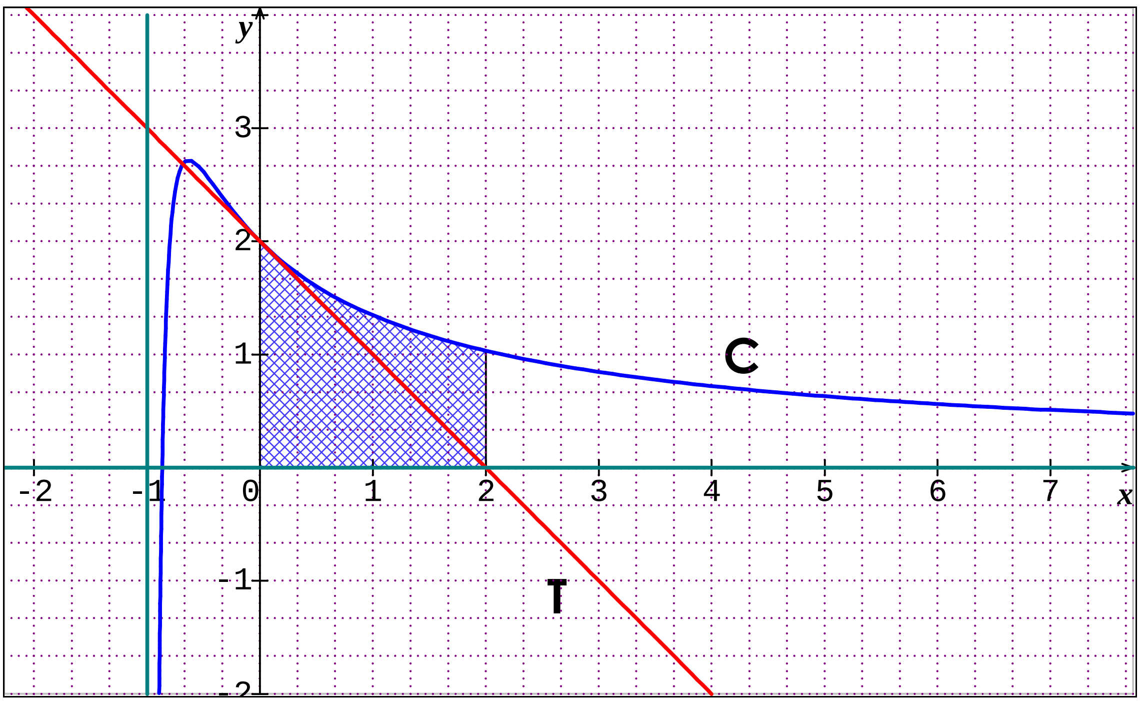
b) $I \approx 2{,}80$.

c) Cette intégrale I peut s'interpréter comme la mesure en unités d'aire de la surface comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équation y = 0 et y = 2.

Une unité d'aire se calcule en faisant le produit des unités en abscisse et en ordonnée : 1 u.a vaut donc $1\times 1\text{cm}^2 = 1\text{cm}^2$.

On obtient donc : $I \approx 2{,}80\ \text{cm}^2$.

Ce résultat s'interprète graphiquement par la figure suivante :



Exercice 2 :

A – *Loi normale*

1° X_1 suit une loi normale de moyenne m = 90 et d'écart type σ = 0,17. On se ramène à la loi normale centrée réduite $\mathbb{N}(0\,;1)$ par le changement de variable suivant : $T=\dfrac{X_1-m}{\sigma}=\dfrac{X_1-90}{0{,}17}$.

On peut maintenant répondre à la question posée : probabilité qu'une rondelle soit conforme = son diamètre compris entre 89,6 et 90 ;4 mm.

$$P(89{,}6\le X_1\le 90{,}4)=P\left(\frac{89{,}6-90}{0{,}17}\le T\le\frac{90{,}4-90}{0{,}17}\right)=P(-2{,}35\le T\le 2{,}35)=2\Pi(2{,}35)-1$$

$$\overset{\text{TABLE}}{=}2\times 0{,}9906-1=0{,}9812\approx 0{,}98.$$

La probabilité qu'une rondelle soit conforme est de 98%.

2° D suit une loi normale de moyenne m = 90 et d'écart type σ_1. On se ramène à la loi normale centrée réduite $\mathbb{N}(0\,;1)$ par le changement de variable suivant : $T=\dfrac{D-m}{\sigma_1}=\dfrac{D-90}{\sigma_1}$.

On peut maintenant répondre à la question posée : déterminer σ_1 pour que la probabilité que la rondelle soit conforme est de 99%.

On a à résoudre l'équation suivante : $P(89{,}6\le D\le 90{,}4)=0{,}99$.

$$P(89{,}6\le D\le 90{,}4)=0{,}99\Leftrightarrow P\left(\frac{89{,}6-90}{\sigma_1}\le D\le\frac{90{,}4-90}{\sigma_1}\right)=0{,}99\Leftrightarrow P\left(\frac{-0{,}4}{\sigma_1}\le D\le\frac{0{,}4}{\sigma_1}\right)=0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{0{,}4}{\sigma_1}\right)-1=0{,}99\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{0{,}4}{\sigma_1}\right)-1=0{,}99\Leftrightarrow 2\Pi\left(\frac{0{,}4}{\sigma_1}\right)=1+0{,}99\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{0{,}4}{\sigma_1}\right)=\frac{1{,}99}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{0{,}4}{\sigma_1}\right)=0{,}995$$

Par une lecture inverse de la table, on obtient : $t=2{,}575\Leftrightarrow\dfrac{0{,}4}{\sigma_1}=2{,}575\Leftrightarrow\sigma_1=\dfrac{0{,}4}{2{,}575}=0{,}155\approx 0{,}16.$

L'écart type doit être de 0,16 pour avoir 99% de l'échantillon conforme.

B – *Loi binomiale*

1° Y_1 suit une loi binomiale car :

- il y a deux issues possibles : diamètre défectueux ou pas ;
- on a 4 épreuves aléatoires indépendantes : les rondelles prélevées ;
- il y a même probabilité de réussite (défaut) p = 0,02 pour chaque rondelle.

Les deux paramètres de cette loi sont : n = 4 et p = 0,02 (q = 0,98).

Y_1 suit $\mathbb{B}(4\,;0{,}02)$.

2° La probabilité qu'aucune rondelle soit défectueuse se traduit par :

$P(Y_1 = 0) = C_4^0 \times 0{,}02^0 \times 0{,}98^4 \approx 0{,}922.$

Il y a 92,2% de chance de n'avoir aucune rondelle défectueuse.

3° La probabilité qu'au plus une rondelle soit défectueuse (*maximum une rondelle*) se traduit par :

$P(Y_1 \le 1) = P(Y_1 = 0) + P(Y_1 = 1) = C_4^0 \times 0{,}02^0 \times 0{,}98^4 + C_4^1 \times 0{,}02^1 \times 0{,}98^3 \approx 0{,}997.$

Il y a 99,7% de chance d'avoir au plus une rondelle défectueuse.

C – *Approximation d'une loi binomiale par une loi normale*

1° Y_2 suit une loi binomiale de paramètres n = 1000 et p = 0,02. Cette loi peut être approchée par une loi normale de paramètres m = 20 et σ = 4,43 car la moyenne m correspond à l'espérance E(X) de la loi binomiale définie par : $E(Y_2) = n \times p = 1000 \times 0{,}02 = 20 = m$ et à l'écart type défini par : $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{1000 \times 0{,}02 \times 0{,}98} \approx 4{,}43.$

On retrouve donc les paramètres de la loi normale suivie par Z : $\mathbb{N}$(20 ;4,43).

2° Z suit une loi normale de moyenne m = 20 et d'écart type σ = 4,43. On se ramène à la loi normale centrée réduite $\mathbb{N}(0\,;1)$ par le changement de variable suivant : $T = \dfrac{Z - m}{\sigma} = \dfrac{Z - 20}{4{,}43}$.

On peut maintenant répondre à la question posée : probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes :

L'énoncé est un peu étrange car le 15,5 dans la probabilité ne s'explique pas vraiment (15 oui mais pas 15,5 !!).

$$P(Z \le 15{,}5) = P\left(T \le \frac{15{,}5 - 20}{4{,}43}\right) = P(T \le -1{,}01) = 1 - P(T \le 1{,}01) = 1 - \Pi(1{,}01) \overset{\text{TABLE}}{=} 1 - 0{,}8438 = 0{,}1562 \approx 0{,}16.$$

Il y a 16% de chance d'avoir au plus 15 rondelles non conformes.

D – *Test d'hypothèse*

1° <u>Règle de décision</u> :

- soit $\overline{x}$ la moyenne calculée sur un échantillon de 100 rondelles prélevées au hasard ;
- si $\overline{x} \in [89{,}967;90{,}033]$ la livraison est considérée comme conforme (au seuil de 5%) ;
- sinon, la livraison est considérée comme non conforme (au risque de 5%).

On va démontrer la valeur de l'intervalle même si ce n'est pas demandé :

Cet intervalle répond à la formule suivante : $\left[m-\frac{t\times\sigma}{\sqrt{n}};m+\frac{t\times\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[90-\frac{1{,}96\times0{,}17}{\sqrt{100}};90+\frac{1{,}96\times0{,}17}{\sqrt{100}}\right]=[89{,}967;90{,}033]$.

La valeur de t est donnée par rapport à la probabilité : 5% donne t = 1,96.

2° Au risque de 5% (P = 0,95), peut conclure que la livraison est conforme puisque $\overline{x}=90{,}02$ est bien située dans l'intervalle : $[89{,}967;90{,}033]$.