BTS 2007 CORRECTION

Exercice 1 :

A – Résolution d'une équation différentielle

1° On résout l'équation différentielle du premier ordre sans second membre (E_0) en utilisant le formulaire officiel du BTS :

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$

$$(E_0) : y' + 710y = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 710 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = 710$$

Soit G une primitive de $\frac{b}{a} = 710 \Rightarrow G(t) = 710t$

on a donc $y_1(t) = ke^{-710t}$ avec k constante réelle.

<u>La solution générale de (E_0) est la fonction</u> : $y_1(t) = ke^{-710t}$ avec k une constante réelle restant à déterminer (à faire dans la question **4**°).

2° Si h est une solution particulière de (E) alors h vérifie : $h' + 710h = 710$.

Pour démontrer cela on a besoin de la dérivée de h : $h(t) = 1 \Rightarrow h'(t) = 0$.

On remplace dans (E) : $h' + 710h = 710 \Rightarrow 0 + 710 \times 1 = 710$.

Donc h est bien une solution particulière de (E).

3° <u>Une solution générale de (E) est la somme d'une solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E)</u> :

SG(E) = SG(E_0) + SP(E)

$y(t) = y_1(t) + h(t) \Leftrightarrow y(t) = ke^{-710t} + 1$ avec k constante réelle.

4° La donnée d'une condition initiale (C.I) $f(0) = 0$ permet de déterminer la valeur de la constante k qui vérifie cette condition.

$f(0) = y(0) = ke^{-710\times0} + 1 = k + 1$ et $f(0) = 0 \Rightarrow k = -1$.

Donc $\varphi(t) = -e^{-710t} + 1$.

B – *Étude d'une fonction*

1° $\varphi'(t) = -\left(-710e^{-710t}\right) + 0 = 710e^{-710t}$;

$\varphi'(t) > 0$ car $\begin{cases} 710 > 0 \\ e^{-710t} > 0 \text{ pour tout t réel} \end{cases}$ donc φ fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2° **a :**

<u>Formulaire :</u> $e^t \overset{0}{=} 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + t^2\varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

$e^t \overset{0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

<u>Changement de variable :</u> $e^{-710t} \overset{0}{=} 1 + \frac{-710t}{1!} + \frac{(-710t)^2}{2!} + t^2\varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

$e^{-710t} \overset{0}{=} 1 - 710t + \frac{(-710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

<u>Retour à la fonction :</u> $-e^{-710t} \overset{0}{=} -1 + 710t - \frac{(710t)^2}{2!} + t^2\varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

$1 - e^{-710t} \overset{0}{=} 1 - 1 + 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

$1 - e^{-710t} \overset{0}{=} 710t - \frac{(710t)^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$, $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

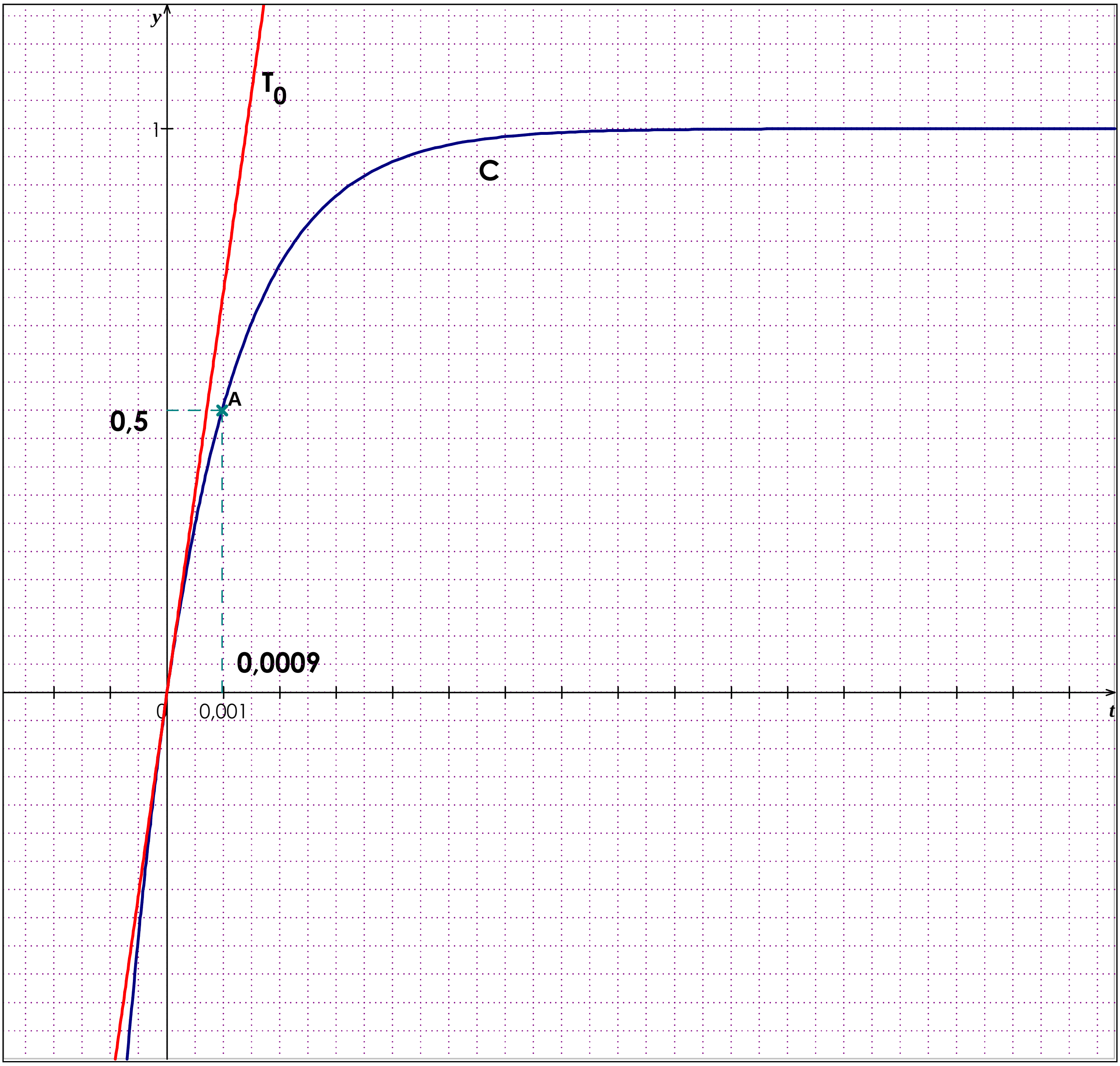
b :

La tangente en 0 est la partie régulière d'ordre 1 du développement limité :
$T_0 : y = 710t$.

Les positions relatives de C et T_0 sont données par le signe de $-\frac{(710t)^2}{2}$:

$\frac{(710t)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow -\frac{(710t)^2}{2} \leq 0$ donc C est au dessous de T_0 autour de 0.

3°



4° **a :**

$\varphi(\alpha) = 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - e^{-710t} = 0{,}5 \Leftrightarrow -e^{-710t} = 0{,}5 - 1 \Leftrightarrow e^{-710t} = 0{,}5 \Leftrightarrow \ln\left(e^{-710t}\right) = \ln 0{,}5 \Leftrightarrow -710t = \ln 0{,}5$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-710} \approx 0{,}00098.$

b : Voir graphique ci-dessus.

C – Calcul intégral

1° $I(t) = 710\int_0^t x e^{-710x} dx$

$U = x \rightarrow U' = 1$

$V' = e^{-710x} \rightarrow V = \dfrac{e^{-710x}}{-710} = -\dfrac{e^{-710x}}{710}$

$\int UV' = [UV] - \int U'V$

$$\int_0^t xe^{-710x}dx=\left[x\frac{e^{-710x}}{-710}\right]_0^t-\int_0^t 1\times\frac{e^{-710x}}{-710}dx=\left[x\frac{e^{-710x}}{-710}\right]_0^t+\frac{1}{710}\int_0^t e^{-710x}dx$$

$$=\left[x\frac{e^{-710x}}{-710}\right]_0^t+\frac{1}{710}\left[\frac{e^{-710x}}{-710}\right]_0^t=\left(t\frac{e^{-710t}}{-710}\right)-0+\frac{1}{710}\left(\frac{e^{-710t}}{-710}-\frac{e^0}{-710}\right)=t\frac{e^{-710t}}{-710}+\frac{1}{710}\left(\frac{e^{-710t}}{-710}+\frac{1}{710}\right)$$

Donc $I(t)=710\int_0^t xe^{-710x}dx=710\left(t\frac{e^{-710t}}{-710}+\frac{1}{710}\left(\frac{e^{-710t}}{-710}+\frac{1}{710}\right)\right)=-te^{-710t}-\frac{e^{-710t}}{-710}+\frac{1}{710}$.

2° $\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-710t}-\frac{e^{-710t}}{-710}+\frac{1}{710}\right)=\frac{1}{710}$ car $\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-710t}}{-710}=0$ et $\lim_{t\to+\infty} te^{-710t}=0$ car c'est une forme indéterminée $\infty\times 0$ mais la fonction exponentielle est prioritaire devant le polynôme du premier degré.

$\lim_{t\to+\infty} I(t)\approx 0{,}00141$.

Exercice 2 :

A – Loi normale

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(30\ ;0{,}09)$

On se ramène à la loi normale centrée réduite par le changement de variable suivant : $T=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-30}{0{,}09}$.

Conforme = $29{,}8\le X\le 30{,}2$.

$P(29{,}8\le X\le 30{,}2)=P\left(\frac{29{,}8-30}{0{,}09}\le T\le\frac{30{,}2-30}{0{,}09}\right)=P(-2{,}22\le T\le 2{,}22)=2\times\Pi(2{,}22)-1\overset{\text{TABLE}}{=}2\times 0{,}9868-1$

$=0{,}9736\approx 0{,}97$.

Il y a 97% de chance d'avoir une pièce conforme.

B – Loi binomiale

1° $Y \hookrightarrow \mathcal{B}$ car :

- 20 expériences aléatoires indépendantes = pièces avec remise ;
- 2 issues possibles par expérience : réussite = défaut, échec = pas de défaut ;
- même probabilité de réussite pour chaque pièce : $p=0{,}03$.

Paramètres de la loi : n = 20 et p = 0,03.

2° $P(Y=0)=C_{20}^0\times 0{,}03^0\times 0{,}97^{20}\approx 0{,}54$.

Il y a 54% de chance de n'avoir aucune pièce défectueuse.

3° $P(Y\ge 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-C_{20}^0\times 0{,}03^0\times 0{,}97^{20}\approx 0{,}46$.

Il y a 46% de chance d'avoir au moins une pièce défectueuse.

C – *Test d'hypothèse*

1° $\bar{Z} \leadsto \mathcal{N}(400\,;0,5)$

On se ramène à la loi normale centrée réduite par le changement de variable suivant :

$T = \dfrac{\bar{Z} - m}{\sigma} = \dfrac{\bar{Z} - 400}{0,5}$.

$$P(400 - h \le \bar{Z} \le 400 + h) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{400 - h - 400}{0,5} \le T \le \frac{400 + h - 400}{0,5}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-h}{0,5} \le T \le \frac{h}{0,5}\right) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow 2 \times \Pi\left(\frac{h}{0,5}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Leftrightarrow \Pi\left(\frac{h}{0,5}\right) = \frac{0,95 + 1}{2} = 0,975$$

Par lecture inverse de la table on obtient : $\dfrac{h}{0,5} = 1,96 \Leftrightarrow h = 1,96 \times 0,5 = 0,98$.

2° Règle de décision :

- si μ appartient à $[400 - 0,98 ; 400 + 0,98] = [399,02 ; 400,98]$ la livraison est acceptée au seuil de risque de 5% (probabilité de 0,95) ;
- sinon on rejette H_0 et on accepte H_1.

3° $\bar{Z} = 399,12$ cette valeur est dans l'intervalle donc la livraison est acceptée avec un risque de 5%.