BTS 2008 CORRECTION

Exercice 1 :

A – Résolution d'une équation différentielle

1° On résout l'équation différentielle du premier ordre sans second membre (E_0) en utilisant le formulaire officiel du BTS :

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

$$(E_0) : y' - 2y = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = -2$$

Soit G une primitive de $\dfrac{b}{a} = -2 \;\Rightarrow G(t) = -2t$

on a donc $y_1(x) = ke^{2x}$ avec k constante réelle.

<u>La solution générale de (E_0) est la fonction</u> : $y_1(x) = ke^{2x}$ avec k une constante réelle restant à déterminer (à faire dans la question **4**°).

2° Si g est une solution particulière de (E) alors g vérifie : $g' - 2g = xe^x$.

Pour démontrer cela on a besoin de la dérivée de g :

$$\begin{matrix} U = -x - 1 \rightarrow U' = -1 \\ V = e^x \rightarrow V' = e^x \end{matrix} \qquad g'(x) = -1 \times e^x + (-x-1) \times e^x = e^x(-x-2).$$

On remplace dans (E) : $g' - 2g = e^x(-x-2) - 2((-x-1)e^x) = e^x(-x-2+2x+2) = xe^x$

Donc g est bien une solution particulière de (E).

3° <u>Une solution générale de (E) est la somme d'une solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E)</u> :

SG(E) = SG(E_0) + SP(E)

$$y(x) = y_1(x) + g(x) \Leftrightarrow y(x) = ke^{2x} + (-x-1)e^x \qquad \text{avec k constante réelle.}$$

4° La donnée d'une condition initiale (C.I) $f(0) = 0$ permet de déterminer la valeur de la constante k qui vérifie cette condition.

$f(0) = y(0) = ke^{2\times 0} + (-0-1)e^0 = k - 1$ et $f(0) = 0 \Rightarrow k = 1$.

$$\text{Donc } f(x)=e^{2x}+(-x-1)e^{x}.$$

B – *Étude d'une fonction*

1° **a :**

$$f(x)=e^{2x}+(-x-1)e^{x}=e^{2x}+g(x)\Rightarrow f'(x)=2e^{2x}+g'(x)=2e^{2x}+e^{x}(-x-2)=e^{x}\left(2e^{x}-x-2\right).$$

b :

$$f'(0)=e^{0}\left(2e^{0}-0-2\right)=1(2-2)=0.$$

Cette valeur représente le coefficient directeur de la tangente T à la courbe représentative de C au point d'abscisse 0.

Puisque cette valeur est égale à 0, cette tangente est horizontale.

2° **a :**

<u>Formulaire :</u> $e^{t}\overset{0}{=}1+\dfrac{t}{1!}+\dfrac{t^2}{2!}+t^2\varepsilon(t),\ \lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

$$e^{t}\overset{0}{=}1+t+\frac{t^2}{2}+t^2\varepsilon(t),\ \lim_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$$

<u>Changement de variable :</u> $e^{2x}\overset{0}{=}1+\dfrac{2x}{1!}+\dfrac{(2x)^2}{2!}+x^2\varepsilon(x),\ \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$$e^{2x}\overset{0}{=}1+2x+2x^2+x^2\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

b :

<u>Retour à la fonction :</u> $f(x)\overset{0}{=}1+2x+2x^2-(x+1)\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)+x^2\varepsilon(x),\ \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$

$$f(x)\overset{0}{=}1+2x+2x^2-1-2x-\frac{3x^2}{2}+x^2\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$f(x)\overset{0}{=}\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x),\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

C – *Calcul intégral*

1° $I=\displaystyle\int_{-0,3}^{0,3}\frac{x^2}{2}dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-0,3}^{0,3}=\left(\frac{0,3^3}{6}\right)-\left(\frac{(-0,3)^3}{6}\right)=0,009.$

2° $J=\displaystyle\int_{-0,3}^{0,3}e^{2x}dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-0,3}^{0,3}=\left(\frac{e^{0,6}}{2}\right)-\left(\frac{e^{-0,6}}{2}\right)=0,5\left(e^{0,6}-e^{-0,6}\right).$

3° $K=\displaystyle\int_{-0,3}^{0,3}(x+1)e^{x}dx$

$$U=x+1\to U'=1$$

$$V'=e^{x}\to V=\frac{e^{x}}{1}=e^{x}$$

$$\int UV'=[UV]-\int U'V$$

$$K=\int_{-0,3}^{0,3}(x+1)e^x dx=\left[(x+1)e^x\right]_{-0,3}^{0,3}-\int_{-0,3}^{0,3}e^x dx=\left[(x+1)e^x\right]_{-0,3}^{0,3}-\left[e^x\right]_{-0,3}^{0,3}=\left[(x+1)e^x-e^x\right]_{-0,3}^{0,3}$$
$$=\left[xe^x\right]_{-0,3}^{0,3}=\left(0,3e^{0,3}\right)-\left(-0,3e^{-0,3}\right)=0,3\left(e^{0,3}+e^{-0,3}\right).$$

4° **a :**

$L=J-K=0,5\left(e^{0,6}-e^{-0,6}\right)-0,3\left(e^{0,3}+e^{-0,3}\right).$

b :

$L\approx 0,00945.$

b :

$L-I\approx 0,00945-0,009=0,00045=4,5\times 10^{-4}.$

Exercice 2 :

A – Loi normale

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(10\,;0,21)$

On se ramène à la loi normale centrée réduite par le changement de variable suivant :

$T=\dfrac{X-m}{\sigma}=\dfrac{X-10}{0,21}.$

1° Conforme x = $9,5\le X\le 10,5$.

$$P(9,5\le X\le 10,5)=P\left(\frac{9,5-10}{0,21}\le T\le\frac{10,5-10}{0,21}\right)=P(-2,38\le T\le 2,38)=2\times\Pi(2,38)-1\overset{\text{TABLE}}{=}2\times 0,9913-1$$
$$=0,983.$$

Il y a 98,3% de chance d'avoir une cote x conforme.

2° Conforme y = $10,5\le Y\le 11,5$.

$P(C)=P(9,5\le X\le 10,5)\times P(10,5\le Y\le 11,5)=0,983\times 0,985=0,968$, la multiplication est possible car les évènements sont indépendants.

Il y a 96,8% de chance d'avoir une pièce conforme.

B – Loi binomiale et loi de Poisson

1° $Z \hookrightarrow \mathcal{B}$ car :

- 50 expériences aléatoires indépendantes = pièces avec remise ;
- 2 issues possibles par expérience : réussite = défaut, échec = pas de défaut ;
- même probabilité de réussite pour chaque pièce : $p=0,03$.

Paramètres de la loi : n = 50 et p = 0,03.

2° $P(Z=0)=C_{50}^{0}\times 0,03^{0}\times 0,97^{50}\approx 0,218.$

Il y a 21,8% de chance de n'avoir aucune pièce défectueuse.

$P(Z \le 2) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) = C_{50}^{0} \times 0{,}03^{0} \times 0{,}97^{50} + C_{50}^{0} \times 0{,}03^{0} \times 0{,}97^{50} + C_{50}^{0} \times 0{,}03^{0} \times 0{,}97^{50}$
$\approx 0{,}811$.
Il y a 81,1% de chance d'avoir au plus 2 pièces défectueuses.

3° **a :** $\lambda = n \times p = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5$.

b : $P(Z_1 \le 2) = P(Z_1 = 0) + P(Z_1 = 1) + P(Z_1 = 2) \overset{\text{table}}{=} 0{,}223 + 0{,}335 + 0{,}251 = 0{,}809$.
Il y a 80,9% de chance d'avoir au plus 2 pièces défectueuses.

C – *Intervalle de confiance*

1° $p = \dfrac{96}{100} = 0{,}96$.

2° Intervalle de confiance : $I_c = \left[p - t\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} ; p + t\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n-1}} \right]$

95% donne une valeur de t égale à 1,96.

$I_c = \left[0{,}96 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}96(1-0{,}96)}{100-1}} ; 0{,}96 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}96(1-0{,}96)}{100-1}} \right] = [0{,}92 ; 0{,}99]$.