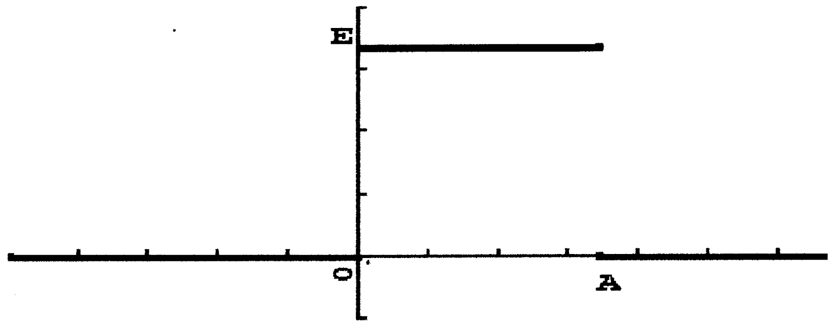
ELECTROTECHNIQUE X.HRM 1 1990

Exercice 1

1.



t	$-\infty$		0		A		$+\infty$
$E\mathcal{U}(t)$		0	E	E	E	E	
$-E\mathcal{U}(t-A)$		0	0	0	$-E$	$-E$	
$E\mathcal{U}(t)-E\mathcal{U}(t-A)$		0	E	E	0	0	

$f(t) = E\mathcal{U}(t) - E\mathcal{U}(t-A) = E(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-A))$

2. Déterminons la transformée de Laplace de l'équation différentielle (1).

$\mathcal{L}[v(t)] = V(p)$

$\mathcal{L}\left[\frac{dv}{dt}(t)\right] = pV(p) - v(0^+) = pV(p)$

donc $\mathcal{L}\left[Rc\frac{dv}{dt}(t) + v(t)\right] = RCpV(p) + V(p) = (RCp+1)V(p)$

$\mathcal{L}[f(t)] = E\frac{1}{p} - E\frac{e^{-pA}}{p} = \frac{E}{p}(1-e^{-pA})$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle (1) est :

$(RCp+1)V(p) = E\frac{1}{p}(1-e^{-pA})$

3. Calculons $V(p)$

$V(p) = E\frac{1}{p(RCp+1)}(1-e^{-pA})$

décomposons la fraction $\frac{1}{p(RCp+1)}$ en éléments simples

$$\frac{1}{p(Rcp+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{RCp+1} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{p(RCp+1)} = \frac{(aRC+b)p+a}{p(RCp+1)}$$

par identification nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ RCa + b & = & 0 \end{cases}$$

$a = 1$ et $b = -RC$

$$\frac{1}{p(RCp+1)} = \frac{1}{p} - \frac{RC}{RCp+1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{RC}}$$

$V(p) = E\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\frac{1}{RC}}\right)(1-e^{-pA})$

4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}\right]=(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\mathcal{U}(t)$

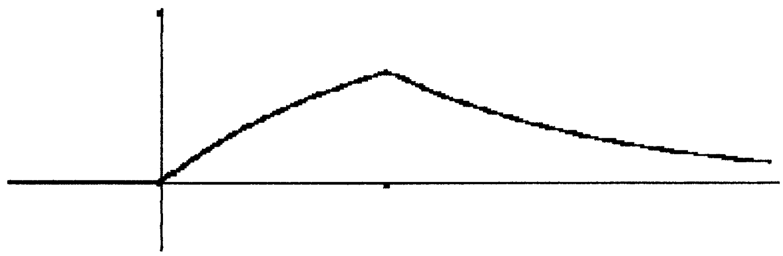
$\mathcal{L}^{-1}\left[(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{1}{RC}})e^{-pA}\right]=(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-A)})\mathcal{U}(t-A)$

$\mathcal{L}^{-1}[V(p)]=v(t)=E(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\mathcal{U}(t)-E(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-A)})\mathcal{U}(t-A)$

$$\begin{cases} v(t)=0 & si\ t\in]-\infty\ ;\ 0[\\ v(t)=E(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) & si\ t\in[0\ ;\ A[\\ v(t)=Ee^{-\frac{1}{RC}t}(e^{\frac{A}{RC}}-1) & si\ t\in[A\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

5. Application numérique
$RC=1 \quad E=1 \quad A=1$

$$\begin{cases} v(t)=0 & si\ t\in]-\infty\ ;\ 0[\\ v(t)=1-e^{-t} & si\ t\in[0\ ;\ 1[\\ v(t)=e^{-t}(e-1) & si\ t\in[1\ ;\ +\infty[\end{cases}$$



Exercice 2

1. La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(54\ ;\ 0,2)$

a) $P(X<53,6\ ou\ X>54,3)=P(X<53,6)+P(X>54,3)=P(X<53,6)+(1-P(X\leq 54,3))=P\left(\frac{X-54}{0,2}<\frac{53,6-54}{0,2}\right)+1-P\left(\frac{X-54}{0,2}\leq\frac{54,3-54}{0,2}\right)=\pi(-2)+1-\pi(1,5)=1-\pi(2)+1-\pi(1,5)=0,0896$

b) $P(m-h\leq X\leq m+h)=0,95$ donc $P\left(-\frac{h}{0,2}\leq\frac{X-54}{0,2}\leq\frac{h}{0,2}\right)=0,95$

$2\pi(\frac{h}{0,2})-1=0,95 \quad \pi(\frac{h}{0,2})=0,975 \quad \frac{h}{0,2}=1,96 \quad \frac{h}{0,2}=1,96 \quad h=0,392$

les côtes d'alerte sont $m-h=53,608$ et $m+h=54,39$

2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans un lot de 40. Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(40\ ;\ 0,09)$.

$P(Y=0)=0,91^{40}=0,023$

$P(Y\leq 2)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)=C_{40}^{0}\times 0,09^{0}\times 0,91^{40}+C_{40}^{1}\times 0,09^{1}\times 0,91^{39}+C_{40}^{2}\times 0,09^{2}\times 0,91^{38}=0,289$