

## Exercice 1

Partie A. Application de la transformation de Laplace

1.  $\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0^+) = pF(p) - 1$

$\mathcal{L}(f''(t)) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+) = p^2F(p) - p$

$\mathcal{L}((f'' + 2f' + 2f)(t)) = (p^2 + 2p + 2)F(p) - p - 2$

2.  $\mathcal{L}(e^{-t}\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p+1}$

3. La transformée de Laplace de l'équation différentielle

$(p^2 + 2p + 2)F(p) - p - 2 = \frac{1}{p+1}$

$F(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+2} + \frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}$

**Partie B. Résolution de l'équation (E) et recherche de f.**1. Déterminons les réels  $a, b, c$  tels que :

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+2p+2}$$

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{a(p^2+2p+2) + (bp+c)(p+1)}{(p+1)(p^2+2p+2)}$$

En développant et en identifiant les numérateurs nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a + b & = 0 \\ 2a + b + c & = 0 \\ 2a & + c = 1 \end{cases}$$

En retranchant les deux dernières équations nous obtenons :  $b = -1$  on peut déduire de la première équation  $a = 1$  et de la dernière  $c = -1$ 

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+2p+2}$$

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

$$f(t) = (e^{-t} + \sin t e^{-t})\mathcal{U}(t)$$

**Partie C. Etude de la fonction f.**1.  $g(t) = e^{-t}$   $g'(t) = -e^{-t}$   $g'(t) < 0$  la fonction  $g$  est strictement décroissante.

$t$	0	$\pi$
$g'(t)$	-	
$g(t)$	1	$e^{-\pi}$

$$h(t) = e^{-t}\sin t \quad h'(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t) = e^{-t}(\cos t + \cos(\frac{\pi}{2} + t))$$

en appliquant la formule  $\cos p + \cos q$  nous obtenons :

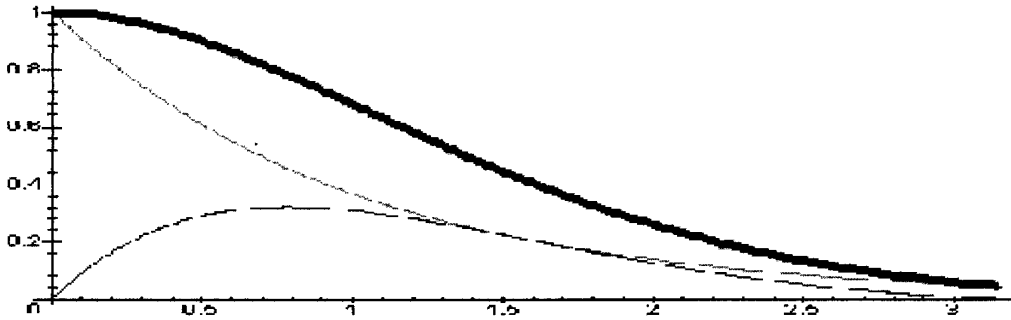
$$h'(t) = 2\cos(\frac{\pi}{4})\cos(t + \frac{\pi}{4})e^{-t} = \sqrt{2} e^{-t} \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$h'(t) \text{ est du signe de } \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$t \in [0 ; \pi] \quad t + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}] \text{ donc } h'(t) \geq 0 \text{ si } t \in [0 ; \frac{\pi}{4}] \text{ et } h'(t) \leq 0 \text{ si } t \in [\frac{\pi}{4} ; \pi]$$

$t$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	0

2.



3.  $t \in [0 ; \pi]$   $t + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}]$  donc  $\cos(t + \frac{\pi}{4}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4}) \leq 1$   
 $f'(t) = g'(t) + h'(t) = e^{-t} (\sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4}) - 1) \leq 0$   
 La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $[0 ; \pi]$ .

$t$	0	$\pi$
$f'(t)$	0	-
$f(t)$	1	$e^{-\pi}$

$g'(0) = -1$  et  $h'(0) = 1$  donc  $f'(0) = 0$

4. Calculons la valeur moyenne  $V$  de  $f$  sur  $[0 ; \pi]$

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (e^{-t} + e^{-t} \sin t) dt$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\pi} = 1 - e^{-\pi}$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t dt =$$

$$\begin{array}{ll} du = e^{-t} dt & u = -e^{-t} \\ v = \sin t & dv = \cos t dt \end{array}$$

$$I_2 = [-e^{-t} \sin t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-t} \cos t dt = \int_0^{\pi} e^{-t} \cos t dt$$

$$\begin{array}{ll} du = e^{-t} dt & u = -e^{-t} \\ v = \cos t & dv = -\sin t dt \end{array}$$

$$I_2 = [-e^{-t} \cos t]_0^{\pi} - I_2 \text{ donc } I_2 = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$$

$$V = \frac{1}{\pi}(I_1 + I_2) = \frac{1}{2\pi}(3 - e^{-\pi})$$

### Exercice 2

1. L'espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances mathématiques

$$E(R'') = E(R + R') = E(R) + E(R') = 300 \text{ donc } E(R'') = 300$$

2. Les variables aléatoires  $R$  et  $R'$  sont indépendantes donc la variance de la somme est égale à la somme des variances

$$V(R'') = V(R + R') = V(R) + V(R') = \sigma^2 + \sigma'^2 = 9 + 16 = 25 \text{ donc } V(R'') = 25$$

3. La variable aléatoire  $R''$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(300 ; 5)$

$$P(290 \leq R'' \leq 305) = P\left(\frac{290-300}{5} \leq \frac{R''-300}{5} \leq \frac{305-300}{5}\right) = P\left(-2 \leq \frac{R''-300}{5} \leq 1\right) = \pi(1) - \pi(-2) = \pi(1) - (1 - \pi(2)) = \pi(1) + \pi(2) - 1 = 0,8185$$