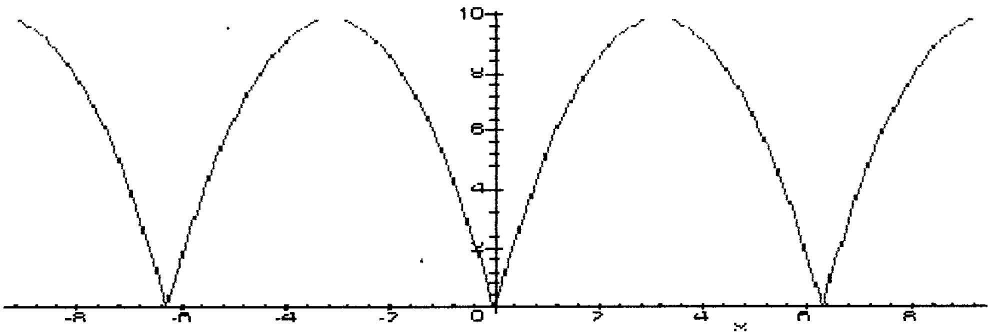
ELECTROTECHNIQUE ZSM M1 1992

Exercice 1

1.



$$\int_0^\pi f(t)dt = \int_0^\pi (-t^2 + 2\pi t)dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \pi t^2\right]_0^\pi = -\frac{\pi^3}{3} + \pi^3 = \frac{2\pi^3}{3}$$

La valeur moyenne de f sur une période

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt = \frac{2\pi^2}{3}$$

2.a) Calculons a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)dt = V = \frac{2\pi^2}{3}$$

b) $I_n = \int_0^\pi t\cos(nt)dt =$

$$\begin{array}{lll} u & = & t \\ dv & = & \cos(nt)dt \end{array} \qquad \begin{array}{lll} du & = & dt \\ v & = & \frac{1}{n}\sin(nt) \end{array}$$

$$I_n = \left[\frac{1}{n}t\sin(nt)\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)dt = \left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^\pi = \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$J_n = \int_0^\pi t^2\cos(nt)dt$

$$\begin{array}{lll} u & = & t^2 \\ dv & = & \cos(nt)dt \end{array} \qquad \begin{array}{lll} du & = & 2tdt \\ v & = & \frac{1}{n}\sin(nt) \end{array}$$

$$J_n = \left[\frac{1}{n}t^2\sin(nt)\right]_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)dt = -\frac{2}{n}\int_0^\pi t\sin(nt)dt$$

$$\begin{array}{lll} u & = & t \\ dv & = & \sin(nt)dt \end{array} \qquad \begin{array}{lll} du & = & dt \\ v & = & -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{array}$$

$$J_n = \left[\frac{2}{n^2}t\cos(nt)\right]_0^\pi - \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \cos(nt)dt = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} - \frac{2}{n^3}[\sin(nt)]_0^\pi = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(-t^2 + 2\pi t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}(-J_n + 2\pi I_n)$

$a_n = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2\pi(-1)^n}{n^2} + \frac{2\pi}{n^2}((-1)^n - 1)\right) = -\frac{4}{n^2}$

3. La fonction f est paire donc $b_n = 0$

la fonction f admet pour développement en série de Fourier $f(t) = \dfrac{2\pi^2}{3} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} cos(nt)$

elle est continue en 0 donc

$$f(0) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2

1. La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(32\ ;\ 1)$. Soit $T = \frac{X-32}{1}$, T suit une loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$

$P(31 \leq X \leq 33) = P(-1 \leq T \leq 1) = \pi(1) - \pi(-1) = 2\pi(1) - 1 = 0,68$

2. Prix de revient moyen de fabrication

a) $M = \frac{10,80}{0,68} = 15,88$

b) X suit une loi normale $\mathcal{N}(32\ ;\ 0,5)$

$p_2 = P(31 \leq X \leq 33) = P\left(\frac{31-32}{0,5} \leq \frac{X-32}{0,5} \leq \frac{33-32}{0,5}\right) = P\left(-2 \leq \frac{X-32}{0,5} \leq 2\right) = 2\pi(2) - 1 = 0,95$

c) $M_2 = \frac{12}{0,95} = 12,63$

Il serait préférable d'utiliser cette nouvelle machine.

3. la variable aléatoire $\overline{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(32\ ;\ \frac{1}{\sqrt{20}})$ soit $T = \frac{\overline{X}-32}{\frac{1}{\sqrt{20}}}$

$P(32 - h \leq \overline{X} \leq 32 + h) = 0,99$

$P(-h\sqrt{20} \leq T \leq h\sqrt{20} = 0,99$

$2\pi(h\sqrt{20}) - 1 = 099$

$\pi(h\sqrt{20}) = 0,995$

$h\sqrt{20} = 2.575$

$h = 0,58$

$\overline{X} \in [31,42\ ;\ 32,58]$.