ELECTROTECHNIQUE BWK 1 1993

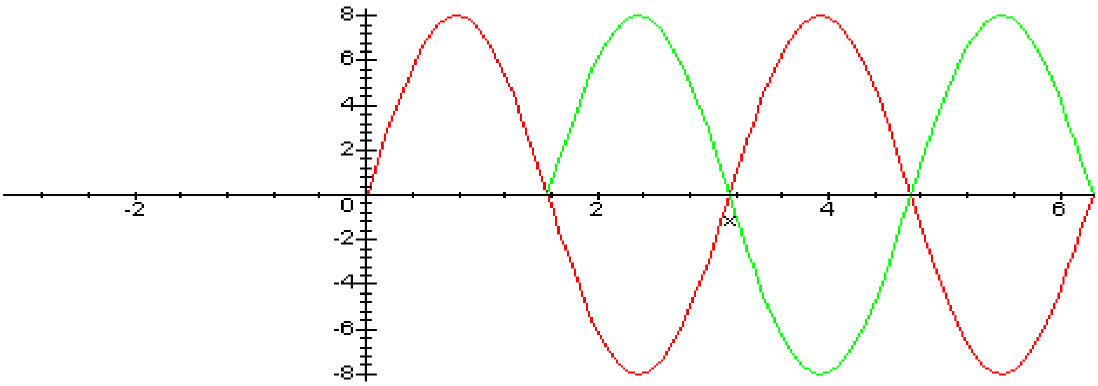
Exercice 1

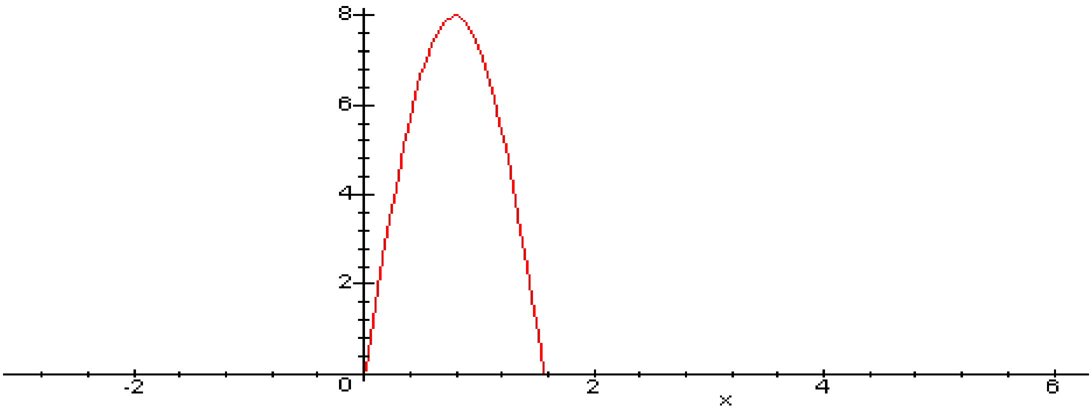
Partie A. Détermination de la transformée de Laplace de v.

1. $L(g(t)) = 8 \times \frac{2}{p^2+4} = \frac{16}{p^2+4}$

$L(h(t)) = 8 \times \frac{2}{p^2+4} e^{-\frac{\pi}{2}p} = \frac{16}{p^2+4} e^{-\frac{\pi}{2}p}$

2.





Sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ $g(t) = 8\sin(2t)$ et $h(t) = 0$ donc $g(t) + h(t) = 8\sin(2t) = v(t)$ sur cet intervalle
Pour $t \geq \pi$ $g(t) = -h(t)$ donc $g(t) + h(t) = 0 = v(t)$

$v(t) = g(t) + h(t)$

3. $V(p) = L(v(t)) = \frac{16}{p^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p})$

Partie B. Résolution du système différentielle (S).

1.

$$(S)\quad \left\{ \begin{array}{lcl} 2\frac{dx}{dt} + x - 2y & = & v \\ \frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt} + 5x - 10y & = & 0 \end{array} \right.$$

La transformée de Laplace du système différentielle (S)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2pX(p) + X(p) - 2Y(p) & = & \frac{16}{p^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p}) \\ pX(p) - 2pY(p) + 5X(p) - 10Y(p) & = & 0 \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (2p+1)X(p) - 2Y(p) & = & \frac{16}{p^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p}) \\ (p+5)X(p) - 2(p+5)Y(p) & = & 0 \end{array} \right.$$

De la deuxième équation nous obtenons $X(p) = 2Y(p)$ et en remplaçant $2Y(p)$ par sa valeur dans la première équation nous obtenons : $X(p) = \frac{8}{p(p^2+4)}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p})$ donc $Y(p) = \frac{4}{p(p^2+4)}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}p})$

2. Déterminons les réels a, b et c tels que :

$\frac{4}{p(p^2+4)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+4}$

en réduisant au même dénominateur $\frac{4}{p(p^2+4)} = \frac{a(p^2+4)+p(bp+c)}{p(p^2+4)}$

$\frac{4}{p(p^2+4)} = \frac{(a+b)p^2+cp+4a}{p(p^2+4)}$

par identification nous obtenons le système

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \\ 4a = 4 \end{cases}$$

donc $a = 1$ $b = -1$ $c = 0$

$\frac{4}{p(p^2+4)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}$

$L^{-1}\left(\frac{4}{p(p^2+4)}\right) = (1 - \cos(2t))U(t)$

$L^{-1}\left(\frac{4}{p(p^2+4)}e^{-\frac{\pi}{2}p}\right) = [1 - \cos(2(t - \frac{\pi}{2}))]U(t - \frac{\pi}{2}) = [1 - \cos(2t - \pi)]U(t - \frac{\pi}{2}) = (1 + \cos(2t))U(t - \frac{\pi}{2})$

$x(t) = 2(1 - \cos(2t))U(t) + 2(1 + \cos(2t))U(t - \frac{\pi}{2})$

t	$-\infty$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\infty$
$2(1 - \cos(2t))U(t)$		0	0	$2 - 2\cos(2t)$	4	$2 - 2\cos(2t)$	
$2(1 + \cos(2t))U(t - \frac{\pi}{2})$		0	0	0	0	$2 + 2\cos(2t)$	
$x(t)$		0	0	$2(1 - \cos(2t))$	4	4	

$$\begin{cases} x(t) = 0 & x \in]-\infty\ ;\ 0[\\ x(t) = 2(1 - \cos(2t)) & x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}[\\ x(t) = 4 & x \in [\frac{\pi}{2}\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = 0 & x \in]-\infty\ ;\ 0[\\ y(t) = 1 - \cos(2t) & x \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}[\\ y(t) = 2 & x \in [\frac{\pi}{2}\ ;\ +\infty[\end{cases}$$

Exercice 2

Partie A

1.Les pannes des machines sont indépendantes et il y a deux éventualités la machine tombe en panne ou elle ne tombe pas en panne la variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(N\ ;\ 0{,}04)$.

$P(X = k) = C_N^k\ 0{,}04^k\ 0{,}96^{N-k}$

$E(X) = 0{,}04N$

$V(X) = 0{,}0384N$

2. X peut être approché par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ donc $\lambda = 4$

$P(X \geq 5) = 1 - (P(X < 5) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)) = 1 - e^{-4}(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!}) = 1 - e^{-4}(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3}) = 1 - 0{,}629 = 0{,}371$

Partie B

1. La variable aléatoire Y suit une loi normale $N(12\ ;\ 1{,}5)$

$P(Y \geq 14) = 1 - P(Y < 14) = 1 - P\left(\frac{Y-12}{1{,}5} < \frac{14-12}{1{,}5}\right) = 1 - \Pi(1{,}33) = 0{,}0918$

2. La variable aléatoire Z suit une loi binomiale $B(1000\ ;\ 0{,}09)$ elle peut être approchée par une loi normale de moyenne $m = np = 90$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{npq} = 9{,}05$

$P[Z \geq 100] = 1 - P[Z < 100] = 1 - P\left[\frac{Z-90}{8{,}54} < \frac{100-90}{9{,}05}\right] = 1 - P\left[\frac{Z-90}{9{,}05} < 1{,}17\right] = 1 - \Pi(1.11) = 1 - 0{,}8438 = 0{,}1562$