ELECTROTECHNIQUE1994 CCLM1

Exercice 1

Partie A

1^o $X(p) = \frac{5}{p^2+1}$

$Y(p) = H(p).X(p) = \frac{5p}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$

2^o Déterminons les réels a, b, c et d

$$\frac{5p}{(p^2+1)(p^2+2p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+1} + \frac{cp+d}{p^2+2p+2}$$

En réduisant au même dénominateur

$$\frac{5p}{(p^2+1)(p^2+2p+2)} = \frac{(ap+b)(p^2+2p+2)+(cp+d)(p^2+1)}{(p^2+1)(p^2+2p+2)}$$

$5p = (a+c)p^3 + (2a+b+d)p^2 + (2a+2b+c)p + (2b+d)$
Par identification on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a & & +c & & = & 0 \\ 2a & +b & & +d & = & 5 \\ 2a & +2b & +c & & = & 0 \\ & +2b & & +d & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} c = -a \\ d = -2b \\ 2a - b = 5 \\ a + 2b = 0 \end{array}\right.$$

donc $a = 2 \quad b = -1 \quad c = -2 \quad d = 2$
3^o a)
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{p}{p^2+1}) = cos(t)\mathcal{U}(t)$

$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{p^2+1}) = sin(t)\mathcal{U}(t)$

$\mathcal{L}^{-1}(\frac{p+1}{(p+1)^2+1}) = cos(t)e^{-t}\mathcal{U}(t)$

$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(p+1)^2+1}) = sin(t)e^{-t}\mathcal{U}(t)$

b)

$$Y(p) = \frac{2p-1}{p^2+1} + \frac{-2p+2}{p^2+2p+2} = \frac{2p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} - \frac{2(p+1)}{(p+1)^2+1} + \frac{4}{(p+1)^2+1}$$

donc

$$\left\{\begin{array}{ll} y(t) = 0 & si \;\; t < 0 \\ y(t) = 2cos(t) - sin(t) - 2cos(t)e^{-t} + 4sin(t)e^{-t} & si \;\; t \geq 0 \end{array}\right.$$

Partie B

1^o $$H(p) = \frac{p}{p^2+2p+2} = \frac{1}{2+p+\frac{2}{p}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{p}{2}+\frac{1}{p}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{j\omega}{2}+\frac{1}{j\omega}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+jr(\omega)}$$

2^o $r'(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\omega^2}$ $\quad r'(\omega) > 0 \;\; \forall\, \omega \in \;]0\,;\,+\infty[$

ω	0		$+\infty$
$r'(\omega)$		$+$	
$r(\omega)$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

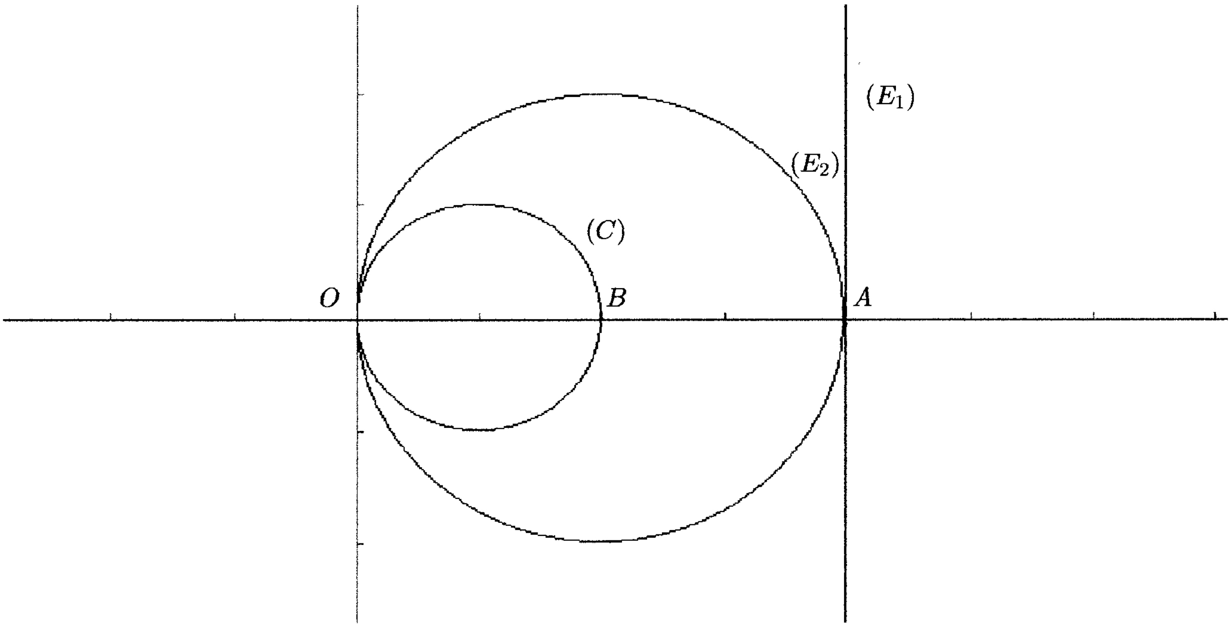
3^o a) Les points m_1 ont pour coordonnées $m_1(1\,;\,r(\omega))$ et $r(\omega) \in \mathbb{R}$ donc (E_1) est la droite d'équation $x = 1$

b) $z_2 = \frac{1}{z_1}$ La transformation est une inversion complexe qui est la composée d'une inversion et d'une symétrie orthogonale d'axe $(O\,;\,\vec{u})$

(E_2) est le cercle de diamètre $[O, A]$ privé du point O.

c) $z = \frac{1}{2}z_2$ la transformation est une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$ si on note B le point de coordonnées $(0\,;\,\frac{1}{2})$ alors $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[O, B]$ privé du point O.

d)



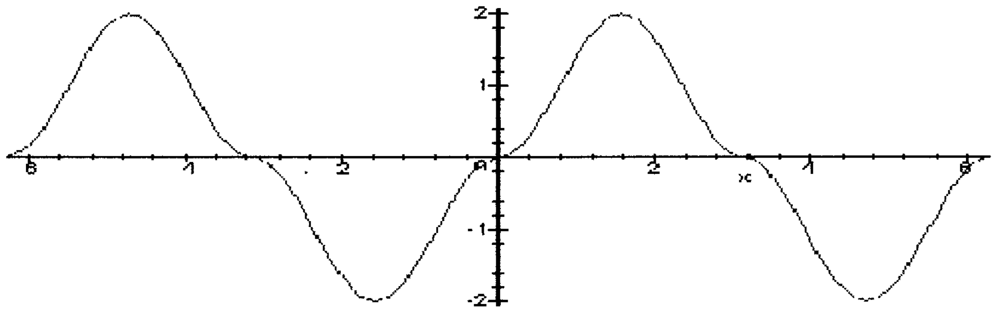
Exercice 2

1^o $f(t) = 1 - \cos(2t)$ $\quad f'(t) = 2\sin(2t)$

$t \in [0\,;\,\pi]$ alors $2t \in [0\,;\,2\pi]$

$f'(t) \geq 0$ si $t \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$ et $f'(t) \leq 0$ *si* $t \in [\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0



2^o f est une fonction impaire f^2 est une fonction paire donc
$E_f^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)dt$
$(1-cos(2t))^2 = 1-2cos(2t)+cos^2(2t) = 1-2cos(2t)+\frac{1}{2}(1+cos(4t)) = \frac{1}{2}cos(4t)-2cos(2t)+\frac{3}{2}$
$E_f^2 = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{8}sin(4t)-sin(2t)+\frac{3t}{2}]_0^{\pi} = \frac{3}{2}$
$E_f = \frac{\sqrt{6}}{2}$
3^o a) $f(t)$ est une fonction impaire, $cos(nt)$ est une fonction paire $f(t)cos(nt)$ est une fonction impaire et $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)cos(nt)dt = 0$ donc $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
b) f a pour période 2π donc $\omega = 1$
$f(t)$ est une fonction impaire, $sin(nt)$ est une fonction impaire $f(t)sin(nt)$ est une fonction paire

$b_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)sin(2t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)sin(2t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(sin(2t)-cos(2t)sin(2t))dt = \frac{2}{\pi}[-\frac{1}{2}cos(2t)-\frac{1}{4}sin^2(2t)]_0^{\pi} = 0$

c) $cos(2t)sin(nt) = \frac{1}{2}\left(sin((n+2)t)+sin((n-2)t)\right)$
$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(sin(nt)-\frac{1}{2}(sin((n+2)t)+sin((n-2)t))\right)dt = \frac{2}{\pi}[-\frac{1}{n}cos(nt)+\frac{1}{2(n+2)}cos((n+2)t)+\frac{1}{2(n-2)}cos((n-2)t)]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{(-1)^{n+2}}{2(n+2)}+\frac{(-1)^{n-2}}{2(n-2)}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2(n+2)}-\frac{1}{2(n-2)}\right)$
$(-1)^n = (-1)^{n+2} = (-1)^{n-2}$
donc si n est paire $b_n = 0$
si n est impaire $b_n = \frac{2}{\pi}(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}) = -\frac{16}{n(n^2-4)}$