

ELECTROTECHNIQUE DCJ 1 1995

Exercice 1

1° Nous avons $P(A) = 0,03$ $P(B) = 0,07$ et les événements A et B indépendants en probabilité

a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,0021$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,03 + 0,07 - 0,0021 = 0,0979$

c) $P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(B) = 0,03 \times 0,93 + 0,97 \times 0,07 = 0,958$

d) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0,97 \times 0,93 = 0,9021$

2° a) On prélève 250 pièces dans une production on peut donc considérer que l'on fait un tirage avec remise de plus on a deux éventualités la pièce présente le défaut A ou ne le présente pas

La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(250 ; 0,03)$

b) La loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ donc $\lambda = 7,5$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = e^{-7,5} \left(1 + 7,5 + \frac{7,5^2}{2} + \frac{7,5^3}{6} \right) = 0,059$$

3° a) La variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(250 ; 0,07)$ cette loi a pour moyenne $m = np$ donc $m = 17,5$ et pour écart-type $\sigma = \sqrt{npq}$ donc $\sigma = 4,03$

On peut approcher Y par une loi normale elle a pour moyenne la moyenne de Y et pour écart-type l'écart-type de Y .

Y suit une loi normale $\mathcal{N}(17,5 ; 4,03)$

b) $P(Y \leq 20) = P\left(\frac{Y-17,5}{4,03} \leq \frac{20-17,5}{4,03}\right) = P\left(\frac{Y-17,5}{4,03} \leq 0,620\right) = \pi(0,620) = 0,73237$

Si nous effectuons la correction de continuité pour avoir une meilleure approximation. On doit calculer :

$$P(Y \leq 20,5) = P\left(\frac{Y-17,5}{4,03} \leq \frac{20,5-17,5}{4,03}\right) = P\left(\frac{Y-17,5}{4,03} \leq 0,744\right) = \pi(0,744) = 0,7718$$

c) $P(15 \leq Y \leq 20) = P\left(\frac{15-17,5}{4,03} \leq \frac{Y-17,5}{4,03} \leq \frac{20-17,5}{4,3}\right) = 2\pi(0,620) - 1 = 0,46474$

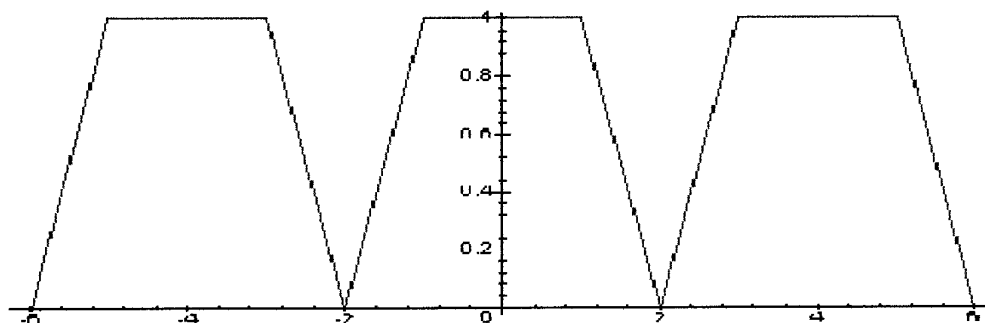
Si nous effectuons la correction de continuité. On doit calculer :

$$P(14,5 \leq Y \leq 20,5) = P\left(\frac{14,5-17,5}{4,03} \leq \frac{Y-17,5}{4,03} \leq \frac{20,5-17,5}{4,3}\right) = 2\pi(0,744) - 1 = 0,543$$

Exercice 2

Partie A

1°



2° a) $f(t)$ est une fonction paire $\sin(n\omega t)$ est une fonction impaire donc $f(t) \sin(n\omega t)$ est une fonction impaire et $\int_{-2}^2 f(t) \sin(n\omega t) dt = 0$ donc $b_n = 0$

b) Calculons a_0

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 dt + \int_1^2 (2-t) dt \right) = \frac{1}{2} \left([t]_0^1 + [2t - \frac{t^2}{2}]_1^2 \right) = \frac{1}{2} \left(1 + 2 - \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ donc $\omega = \frac{\pi}{2}$

c) Calculons a_n

$f(t)$ est une fonction paire, $\cos(\frac{n\pi}{2}t)$ est une fonction paire donc $f(t) \cos(\frac{n\pi}{2}t)$ est une fonction paire.

$$a_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \int_0^2 f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt + \int_1^2 (2-t) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt$$

$$I_1 = \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = \frac{2}{n\pi} [\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)]_0^1 = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$I_2 = \int_1^2 (2-t) \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt$$

faisons une intégration par parties

$$\begin{aligned} u &= 2-t & du &= -dt \\ dv &= \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt & v &= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$I_2 = \left[\frac{2}{n\pi} (2-t) \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right]_1^2 + \frac{2}{n\pi} \int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt = -\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2 \pi^2} [\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)]_1^2 = -\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right))$$

$$a_n = I_1 + I_2 = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right))$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi^2} \quad a_2 = -\frac{2}{\pi^2} \quad a_3 = \frac{4}{9\pi^2} \quad a_4 = 0$$

Partie B

1° la fonction φ est une somme de fonction paire elle est paire.

la fonction $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ a pour période 4 la fonction $\cos(\pi t)$ a pour période 2 la fonction φ a pour période 4.

2 a) ° calculons $\varphi'(t)$

$$\varphi'(t) = -\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{2}{\pi} \sin(\pi t) = \frac{2}{\pi} (\sin(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right))$$

en appliquant la formule $\sin(p) - \sin(q)$ on a :

$$\varphi'(t) = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$$

b) $t \in [0, 2]$ donc $\frac{\pi}{4}t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \geq 0$

$\varphi'(t)$ est du signe de $\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$

$t \in [0, 2]$ donc $\frac{3\pi}{4}t \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \geq 0$ si $t \in [0, \frac{2}{3}]$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \leq 0$ si $t \in [\frac{2}{3}, 2]$

t	0	$\frac{2}{3}$	2
$\varphi'(t)$	0	0	0
$\varphi(t)$	$\frac{3\pi^2+8}{4\pi^2}$	$\frac{3\pi^2+12}{4\pi^2}$	$\frac{3\pi^2-24}{4\pi^2}$

