ELECTROTECHNIQUE1996 FCF1M

Exercice 1

1) La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(700\ ;\ 20)$

$P(660 \leq X \leq 732) = P\left(\frac{660-700}{20} \leq \frac{X-700}{20} \leq \frac{732-700}{20}\right) = P\left(-2 \leq \frac{x-700}{20} \leq 1,6\right) = \pi(1,6) - \pi(-2) = \pi(1,6) + \pi(2) - 1 = 0,9224$

2)

$$\begin{array}{rcl} P(700-h \leq X \leq 700+h) & \geq & 0,95 \\ P\left(-\frac{h}{20} \leq \frac{X-700}{20} \leq \frac{h}{20}\right) & \geq & 0,95 \\ 2\pi\left(\frac{h}{20}\right) - 1 & \geq & 0,95 \\ \pi\left(\frac{h}{20}\right) & \geq & 0,975 \\ \frac{h}{20} & \geq & 1,96 \\ h & \geq & 39,2 \end{array}$$

h doit être supérieur à 39,2.

3)a) Y_{10} suit une loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0,08)$

$P(Y_{10} = 3) = C_{10}^3 \times 0,08^3 \times 0,92^7 = 0,034$

b) Y_{50} suit une loi de poisson de paramètre $\lambda = np$ donc $\lambda = 4$

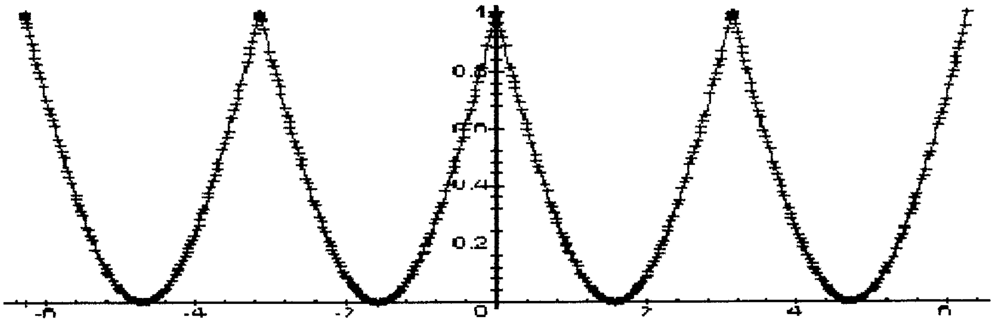
$P(Y_{50} = 4) = e^{-4}\frac{4^4}{4!} = 0,195$

Si on a 45 boules au moins acceptées on a donc au plus 5 boules refusées

$P(Y_{50} \leq 5) = P(Y_{50} = 0) + P(Y_{50} = 1) + P(Y_{50} = 2) + P(Y_{50} = 3) + P(Y_{50} = 4) + P(Y_{50} = 5) = 0,784$

Exercice 2

1) $f(t) = 1 - sint \quad si \quad 0 \leq t \leq \pi$



2)a) $f(t)$ est une fonction paire $\sin(nt)$ est une fonction impaire donc $f(t)\sin(nt)$ est une fontion impaire et $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = 0$ donc $b_n = 0$.

b) $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}[t + \cos(t)]_0^{\pi} = \frac{\pi-2}{\pi}$

c) $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(t)dt - \sin(t)\cos(t)\right)dt$

$= \frac{2}{\pi}\left([\sin(t) - \frac{1}{2}\sin^2(t)]_0^{\pi}\right) = 0$

d) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(nt) - \sin(t)\cos(nt))dt =$

$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(nt) - \frac{1}{2}(\sin((n+1)t) + \sin((1-n)t)))dt = \frac{2}{\pi}[\frac{1}{n}\sin(nt) + \frac{1}{2(n+1)}\cos(n+1)t + \frac{1}{2(1-n)}\cos(1-n)t]_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2-2n} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2-2n}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{4(-1)^{n+1}}{4-4n^2} - \frac{4}{4-4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}$

Si $n = 2p$ alors $a_n = a_{2p} = \frac{4}{\pi(4p^2-1)}$

et si $n = 2p + 1$ alors $a_n = a_{2p+1} = 0$.

e)

$$f(t) = 1 - \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(4n^2+1)} \cos(2nt)$$

3)a) Les fonctions $cos(2t)$ et $cos(4t)$ sont paires donc g est une fonction paire

$cos(2t)$ a pour période π, $cos(4t)$ a pour période $\frac{\pi}{2}$ donc g a pour période π.

b) $g'(t) = -\frac{8}{3\pi} sin(2t) - \frac{16}{15\pi} sin(4t) = -\frac{8}{3\pi}(sin(2t) + \frac{2}{5} sin(4t))$

$sin(2a) = 2sin(a)cos(a)$ donc $sin(4t) = 2sin(2t)cos(2t)$

et $g'(t) = -\frac{8}{3\pi} \sin(2t)(1 + \frac{4}{5}\cos(2t))$

$t \in [0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ donc $2t \in [0\ ;\ \pi]$ et $sin(2t) \geq 0$

$-1 \leq cos(2t) \leq 1$ donc $-\frac{4}{5} \leq \frac{4}{5} cos(2t) \leq \frac{4}{5}$ et $1 + \frac{4}{5} cos(2t) \geq 0$

$g'(t)$ est négatif sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	$-$	0
$g(t)$	$1 - \frac{2}{5\pi}$	$\searrow$	$1 - \frac{44}{15\pi}$