

## ELECTROTECHNIQUE 1997 GCJ1M

### Exercice I

1. Transformée de Laplace de la fonction :  $t \rightarrow (t+1)\mathcal{U}(t)$

$$\mathcal{L}((t+1)\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

2. Transformée de Laplace de la fonction :  $t \rightarrow \frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t)$

$$\mathcal{L}(\frac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t)) = \frac{1}{2}(p^2 I(p) - pi(0^+) - i'(0^+)) + pI(p) - i(0^+) + I(p) = (\frac{1}{2}p^2 + p + 1) I(p) - \frac{p}{2} - 1$$

car  $i(0^+) = 1$  et  $i'(0^+) = 0$

3. L'équation différentielle a pour transformée de Laplace

$$(\frac{1}{2}p^2 + p + 1) I(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{p}{2} + 1$$

$$\text{donc } I(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + 2p + 2}{p^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{p^3 + p^2 + p^2 + 2p + 2}{p^2(p^2 + 2p + 2)}$$

$$4. I(p) = \frac{p^3 + p^2}{p^2(p^2 + 2p + 2)} + \frac{p^2 + 2p + 2}{p^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{p+1}{p^2 + 2p + 2} + \frac{1}{p^2}$$

$$5. p^2 + 2p + 2 = (p+1)^2 + 1$$

$\frac{p}{p^2+1}$  a pour original  $\cos(t)\mathcal{U}(t)$  et on sait  $\mathcal{L}(f(t)e^{-at}\mathcal{U}(t)) = F(p+a)$

$$i(t) = (t + \cos(t)e^{-t})\mathcal{U}(t).$$

6. le développement limité de  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\text{donc } \cos(x)e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) = 1 - x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\text{le développement de } f(x) = 1 + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$$

### Exercice II

$$f(x) = \frac{1+jx}{1+2jx}$$

1) a) calculons  $f(0) = 1$

$$f(1) = \frac{1+j}{1+2j} = \frac{(1+j)(1-2j)}{1^2+2^2} = \frac{3-j}{5}$$

le point  $A(1,0)$  et  $B(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$

b) Résolvons  $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}j$

En multipliant les deux membres par  $4(1+2jx)$  on a :

$$4 + 4jx = (3-j)(1+2jx) \text{ donc } 4 + 4jx = 3 - j + 6jx + 2x \quad 1 + j = 2x + 2jx \quad (1+j) = 2(1+j)x$$

$$x = \frac{1}{2}$$

2) Calculons le module de  $f(x) - \frac{3}{4}$

$$f(x) - \frac{3}{4} = \frac{1+jx}{1+2jx} - \frac{3}{4} = \frac{4+4jx-3-6jx}{4(1+2jx)} = \frac{1-2jx}{4(1+2jx)}$$

$1-2jx$  et  $1+2jx$  sont deux complexes conjugués ils ont même module donc  $|f(x) - \frac{3}{4}| = \frac{1}{4}$ .

donc les points d'affixes  $f(x)$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}$  de centre le point de coordonnées  $(\frac{3}{4}, 0)$  et de rayon  $\frac{1}{4}$ .

3) Calculons  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+2jx}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+2jx} = \frac{1+2jx+1}{2(1+2jx)} = \frac{2(1+jx)}{2(1+2jx)} = f(x)$$

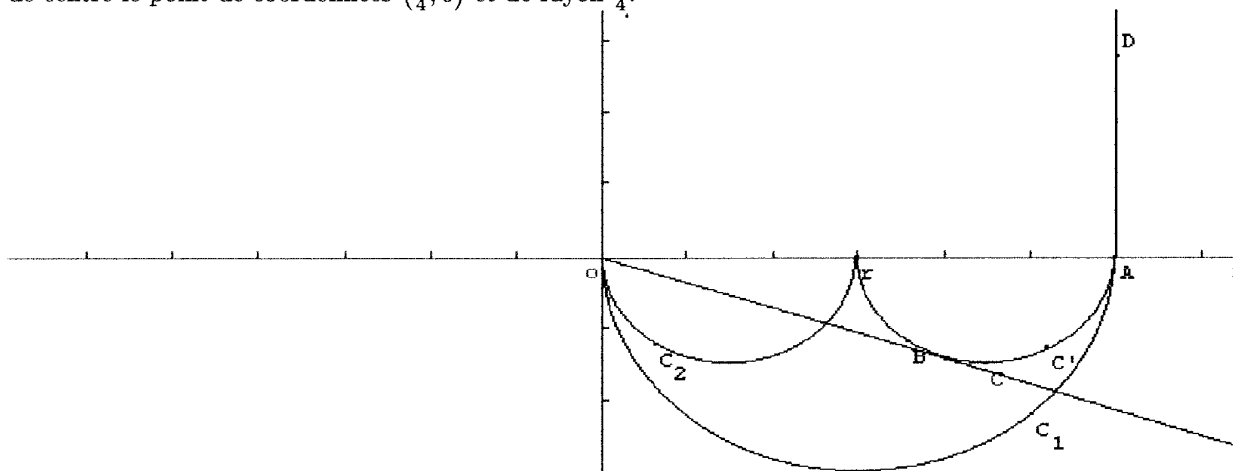
4) a) Les points d'affixes  $z = 1 + 2jx$  ont pour coordonnées  $(1, 2x)$  ils ont même abscisse 1 et une ordonnée positive ces points appartiennent à la demi-droite  $(D)$  tel que  $x = 1$  et  $y \geq 0$ .

b) La transformation qui a  $z$  fait correspondre  $z_1 = \frac{1}{z}$  est une inversion complexe à la droite d'équation  $x = 1$  elle fait correspondre le cercle de diamètre  $[O, A]$  privé du point  $O$ .

Puisque nous avons la demi droite  $(D)$  nous aurons seulement la partie du cercle précédent située sous l'axe des abscisses car l'inversion complexe est la composée d'une inversion et d'une symétrie orthogonale d'axe l'axe des abscisses.

c) La transformation qui a  $z_1$  fait correspondre  $z_2 = \frac{1}{2}z_1$  est une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{2}$  elle transforme un cercle en un cercle donc l'image du demi-cercle  $(C_1)$  sera un demi-cercle  $(C_2)$  situé sous l'axe des abscisses de centre le point de coordonnées  $(\frac{1}{4}, 0)$  et de rayon  $\frac{1}{4}$ .

d) la transformation qui a  $z_2$  fait correspondre  $z = z_2 + \frac{1}{2}$  est une translation de vecteur  $\frac{1}{2}\vec{u}$  l'image d'un cercle est un cercle donc le demi-cercle  $(C_1)$  a pour image le demi-cercle  $(C)$  situé sous l'axe des abscisses de centre le point de coordonnées  $(\frac{3}{4}, 0)$  et de rayon  $\frac{1}{4}$ .



5) a)  $\varphi(x) = \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(2x)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{1+4x^2} = \frac{1+4x^2-2-2x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)} = \frac{2x^2-1}{(1+x^2)(1+4x^2)}$$

$$\varphi'(x) = 0 \text{ si } 2x^2 - 1 = 0 \text{ puisque } x \geq 0 \text{ donc } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Pour  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  l'argument du nombre complexe  $f(x)$  est à son minimum Si on trace la tangente au demi cercle  $(C)$  issue de  $O$  l'angle formé par le vecteur  $\vec{u}$  et cette tangente a pour mesure  $-0,34$ .