ELECTROTECHNIQUE 1998 EQMAT

Exercice I

1°. Probabilité pour qu'une pièce de10 F frappée par la Banque de France soit acceptée
La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}$ $(6,49\ ;\ 0,015)$

$P(6,455 \leq X \leq 6,525) = P\left(\frac{6,455-6,49}{0,015} \leq \frac{x-6,49}{0,015} \leq \frac{6,625-6,49}{0,015}\right) = P\left(-2,33 \leq \frac{X-6,49}{0,015} \leq 2,33\right) = \pi(2,33)-\pi(-2,33) = \pi(2,33) - (1-\pi(2,33)) = 2\pi(2,33) - 1 = 0,980$

2° Y suit une loi normale $\mathcal{N}(6,56\ ;\ 0,02)$
Calculons la probabilité pour qu'une fausse pièce soit acceptée

$P(6,455 \leq Y \leq 6,525) = P\left(\frac{6,455-6,56}{0,02} \leq \frac{Y-6,56}{0,02} \leq \frac{6,525-6,56}{0,02}\right) = P\left(-5,25 \leq \frac{Y-6,56}{0,02} \leq -1,75\right) = \pi(-1,75) - \pi(-5,25) = 1-\pi(1,75) - (1-\pi(5,25)) \doteq 0,040$

3° 1. $P(A) = P\left((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = p(B) \times p(A/B) + P(\overline{B}) \times P(A/\overline{B}) = \frac{19}{20} \times 0,980 + \frac{1}{20} \times 0,040 = 0,933$

$$2.\ a.\ P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) \times P(\overline{A}/B)}{1-P(A)} = \frac{P(B) \times (1-p(A/B))}{1-P(A)} = 0,284$$

$P(B/\overline{A})$ est la probabilité pour qu'une pièce soit produite par Banque de France sachant qu'elle est refusée

$$b.\ P(\overline{B}/A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{P(\overline{B}) \times P(A/\overline{B})}{P(A)} = 0,002$$

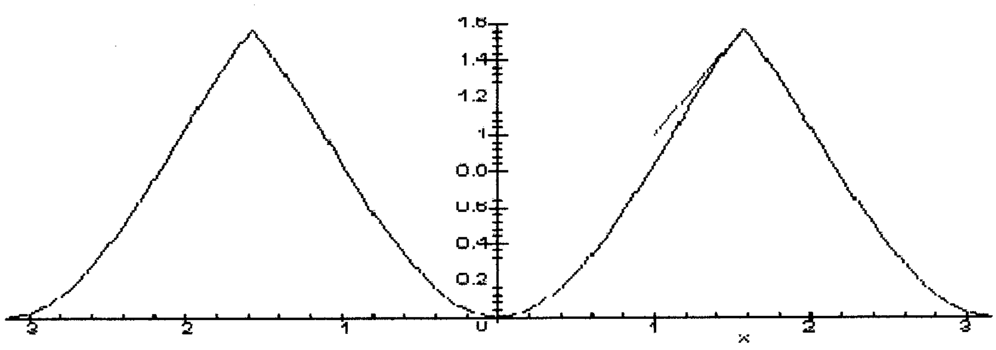
$P(\overline{B}/A)$ est la probabilité pour qu'une pièce soit produite par faussaires sachant qu'elle est acceptée

Exercice II

1.a. Variations de f sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$.
$f(t) = t\sin(t)$ donc $f'(t) = \sin(t) + t\cos(t)$
Sur l'intervalle $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ t, $\sin(t)$ et $\cos(t)$ sont positifs donc $f'(t) \geq 0$

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$	0	$+$	1
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

b.



2. a. f est une fonction paire $\sin(2nt)$ est une fonction impaire donc $f(t)\sin(2nt)$ est impaire et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(2nt)dt = 0$

$b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

b. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)dt$

En faisant une intégration par parties

$$\begin{array}{rclrcl} u & = & t & du & = & dt \\ dv & = & \sin(t)dt & v & = & -\cos(t) \end{array}$$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\left([-t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt\right) = \frac{2}{\pi}\left((0-0) + [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi}$

c. $\sin(t)\cos(2t) = \frac{1}{2}(\sin(3t) + \sin(-t)) = \frac{1}{2}(\sin(3t) - \sin(t))$

f est une fonction paire $cos(2t)$ est une fonction paire $f(t)\cos(2t)$ est une fonction paire.

$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(2t)dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos(2t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sin(3t) - \sin(t))dt$

en faisant une intégration par parties

$$\begin{array}{rclrcl} u & = & t & du & = & dt \\ dv & = & (\sin(3t) - \sin(t))dt & v & = & -\frac{1}{3}\cos(3t) + \cos(t) \end{array}$$

$a_1 = \frac{2}{\pi}\left([t(-\frac{1}{3}\cos(3t) + \cos(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{3}\cos(3t) - \cos(t))dt\right) = \frac{2}{\pi}[\frac{1}{9}\sin(3t) - \sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(-\frac{1}{9} - 1) = -\frac{20}{9\pi}$

3. Calculons a_2

En appliquant le résultat $a_2 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{3^2}\right) = \frac{68}{225\pi}$

et en appliquant la formule de Parseval à g

$$g_e^2 = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{400}{81\pi^2} + \frac{4624}{50625\pi^2}\right) = 0,660$$

une valeur approchée de $f_e = 0,812$