

BTS ELECTROTECHNIQUE 1999 EQMAT

Exercice 1

I. Calculons p

$$p = \frac{1}{12} \int_0^{12} \frac{t^2}{576} dt = \frac{1}{12} \times \frac{1}{576} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{12} = \frac{12^2}{3 \times 576} = \frac{1}{12} = 0,083$$

II.1. La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(0,8 ; 0,4)$

$$p_1 = P(X \leq 1) = P\left(\frac{X-0,8}{0,4} \leq \frac{1-0,8}{0,4}\right) = P\left(\frac{X-0,8}{0,4} \leq 0,5\right) = \pi(0,5) = 0,6915$$

2. La variable aléatoire Y suit une loi normale $\mathcal{N}(3 ; 1)$

$$p_2 = P(Y \leq 1) = P\left(\frac{Y-3}{1} \leq \frac{1-3}{1}\right) = P(Y-3 \leq -2) = \pi(-2) = 1 - \pi(2) = 0,0228$$

3.a. Calculons p_3

On notera A l'événement la durée de vie est inférieure à 1 an

$$p_3 = P((D \cap A) \cup (\bar{D} \cap A)) = P(D \cap A) + P(\bar{D} \cap A) = P(D) \times P(A/D) + P(\bar{D}) \times P(A/\bar{D}) = p \times p_1 + (1-p) \times p_2 = 0,08 \times 0,6915 + 0,92 \times 0,0228 = 0,076$$

b. Le tirage est assimilé à un tirage avec remise donc les expériences sont indépendantes de plus il y a deux possibilités et deux seulement le composant présente le défaut ou il ne le présente pas

Nous avons donc une loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,08)$.

Notons Z la variable aléatoire égale au nombre de composant présentant le défaut.

$$p' = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - C_{20}^0 \times 0,08^0 \times 0,92^{20} = 1 - 0,92^{20} = 0,811$$

Exercice n°2

I. Le système différentiel \mathcal{S}

$$\begin{cases} f'(t) + f(t) + g(t) = 0 \\ g'(t) + g(t) - f(t) = 0 \\ f(0) = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

a pour transformée de Laplace

$$\begin{cases} pF(p) - f(0^+) + F(p) + G(p) = 0 \\ pG(p) - g(0^+) + G(p) - F(p) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p+1)F(p) + G(p) = 1 \\ -F(p) + (p+1)G(p) = 0 \end{cases}$$

de la deuxième équation on obtient : $F(p) = (p+1)G(p)$

En remplaçant $F(p)$ par sa valeur dans la première équation on déduit : $((p+1)^2 + 1)G(p) = 1$

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)^2+1} \text{ et } F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1}$$

2. On sait que $\frac{p}{p^2+1}$ a pour original $\cos(t)$ et $\frac{1}{p^2+1}$ a pour original $\sin(t)$ de plus $\mathcal{L}(e^{-at}f(t)U(t)) = F(p+a)$

Donc l'original de $F(p)$ est $f(t) = e^{-t} \cos(t)U(t)$ et $G(p)$ a pour original $g(t) = e^{-t} \sin(t)U(t)$

II.1.a. $x(t) = e^{-t} \cos(t)$ donc $x'(t) = -e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t) = -e^{-t} (\cos(t) + \sin(t))$

$y(t) = e^{-t} \sin(t)$ donc $y'(t) = -e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t) = e^{-t} (\cos(t) - \sin(t))$

Calculons $-\sqrt{2}e^{-t} \cos(t - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}e^{-t} (\cos(t) \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(t) \sin(\frac{\pi}{4})) = x'(t)$ car $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

de même $\sqrt{2}e^{-t} \cos(t + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{-t} (\cos(t) \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(t) \sin(\frac{\pi}{4})) = y'(t)$

b. Déterminons le signe de $x'(t)$

$-e^{-t}$ est strictement négatif et $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont positifs sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(t) + \sin(t) > 0$ $x'(t)$ est strictement négatif sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

Déterminons le signe de $y'(t)$

$y'(t)$ est du signe $\cos(t + \frac{\pi}{4})$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $t + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ donc le facteur $\cos(t + \frac{\pi}{4})$ change de signe pour $t = \frac{\pi}{4}$ et pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}] \cos(t + \frac{\pi}{4}) \geq 0$ et pour $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \cos(t + \frac{\pi}{4}) \leq 0$

c.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	-		-
$y'(t)$	+	0	-
$x(t)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	0
$y(t)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$e^{-\frac{\pi}{2}}$

d. Le coefficient directeur des tangentes est égale à $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\cos(t+\frac{\pi}{4})}{\cos(t-\frac{\pi}{4})}$

pour $t = 0$ le coefficient directeur est égale à $m_0 = -1$, pour $t = \frac{\pi}{4}$ $m_{\frac{\pi}{4}} = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{2}$ $m_{\frac{\pi}{2}} = 1$

2.a. $z(t + \frac{\pi}{2}) = e^{-(t+\frac{\pi}{2})} (\cos(t + \frac{\pi}{2}) + i\sin(t + \frac{\pi}{2}))$

$\cos(t + \frac{\pi}{2}) + i\sin(t + \frac{\pi}{2})$ est le produit de deux nombres complexes de module 1 et d'arguments t et $\frac{\pi}{2}$.

Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est le nombre complexe i donc

$z(t + \frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} \times i \times e^{-t} (\cos t + i\sin t) = e^{-\frac{\pi}{2}} \times i \times z(t)$

b. la transformation géométrique est une similitude de centre O de rapport $e^{-\frac{\pi}{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

